Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Fisica Indirizzo Tecnologie per l'Innovazione
Parziale di CALCOLO
7 aprile 2009

1) Calcolare i seguenti limiti:
   a) [punti 3] $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tgx - senx}$
   b) [punti 3] $\lim_{x\to 0^+}\frac{ln\left(e^x-1\right)}{ln\, x}$

Soluzione

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tgx-senx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{senx}{cos\, x}-senx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos x}{senx-senx\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos x}{senx\left(1-\cos x\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{senx\left(1-\cos x\right)}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{senx}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}=2$$

b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{ln\left(e^x-1\right)}{ln\, x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+x\right)=1$. Si applica la regola di de L'Hospital.

2) Si tracci il grafico della funzione

$$f\left(x\right)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}\,.$$

Soluzione

Il dominio della funzione è dato dalla soluzione della disequazione: $\frac{x^3-1}{x}\ge 0$ che è soddisfatta per $x<0$ e $x\ge 1$. La funzione si annulla per $x=0$ e altrove è sempre positiva.
Prima di calcolare il comportamento della funzione agli estremi dell'intervallo, osserviamo che la stessa può essere scritta nella forma $f\left(x\right)=\left|x\right|\sqrt{1-\frac{1}{x}}$. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=+\infty$ e quindi andiamo alla ricerca di asintoti obliqui.

$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x\right|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=-1$, $q=\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}+x\right]$, razionalizzando il numeratore si ha:

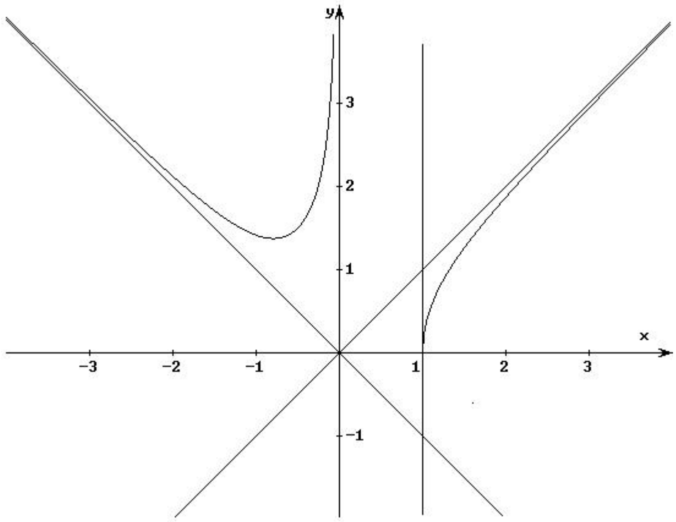
$$q=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}+x\right]\cdot\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}-x\right]}{\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}-x\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-1}{x}-x^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}-x\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\left[\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}-x\right]}=0$$

la retta $y=-x$ è un asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

Con calcoli analoghi si ottiene:

$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ e $q=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=0$

quindi la retta $y=x$ è un asintoto obliquo per $x\to+\infty$. Inoltre, essendo $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ l'asse delle y è un asintoto verticale.



La derivata prima è $f'(x)=\frac{2x^3+1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$.

La prima cosa che si osserva e che nel punto $x=1$ la derivata non è definita. Nello studio del segno si tenga conto che la quantità $\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$ è sempre positiva nel dominio della funzione e che quindi il segno è dato dal termine $2x^3+1$. Si ha quindi che la derivata prima è negativa per $x<-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, mentre è positiva per $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<x<0$ e $x>1$ e si annulla per $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Quindi $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ è un punto di minimo. Infine si noti che $\lim_{x\to1^+}\left[\frac{2x^3+1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}\right]=+\infty$ e quindi la curva ha una tangente verticale di equazione $x=1$.

La funzione ha dei flessi se si annulla la derivata seconda $f''(x)=\frac{3\left(4x^3-1\right)}{4x^3\left(1-x^3\right)}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$. L'unico punto in cui la derivata seconda è nulla è $x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ che essendo un valore compreso tra 0 e 1 non appartiene al dominio. Si vede inoltre che $f''(x)>0$ e quindi la concavità è rivolta verso l'alto, per $x<0$ e che $f''(x)<0$ e quindi la concavità è rivolta verso il basso, per $x>1$.

3) Calcolare i seguenti integrali:

a) [punti 3] $\int\frac{x^3-2x-1}{x^2-x+1}dx$

b) [punti 3] $\int arctg\sqrt{x}dx$

Soluzione

3a) Essendo $\frac{x^3-2x-1}{x^2-x+1}=x+1-\frac{2x+2}{x^2-x+1}$ si ha:

$$\int \frac{x^3-2x-1}{x^2-x+1}dx = \int (x+1)\,dx - \int \frac{2x+2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{3}{x^2-x+1}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - ln\left(x^2-x+1\right) - 3\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - ln\left(x^2-x+1\right) - 4\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - ln\left(x^2-x+1\right) - 2\sqrt{3}arctg\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right] + C$$

3b) Per sostituzione, si pone $\sqrt{x} = t$ da cui $x = t^2$ e $dx = 2t \cdot dt$, quindi:

$\int arctg\sqrt{x}dx = 2\int t \cdot arctgtdt$. Integrando per parti, dopo aver posto $f(t) = arctgt$ e $g'(t) = t$. Si ha:

$$\int tarctgtdt = \frac{1}{2}t^2 arctgt - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Quest'ultimo integrale si calcola per decomposizione, infatti: $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ e quindi:

$\int \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right]dt = t - arctgt + C$. Allora

$$\int arctg\sqrt{x}dx = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C = (x+1)arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

4) Dimostrare, in base ai criteri, che

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

converge e calcolarne il valore.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine superiore a qualunque numero n naturale, infatti: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2n-1)x^{n-1}}{e^{\sqrt{x}}} = 0$. Inoltre per $x \to 0$ da destra la funzione è infinita di ordine 1/2, infatti

$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{(x)^{1/2}}} = \lim_{x\to0^+} e^{-\sqrt{x}} = 1$. L'integrale converge in entrambi i casi.

Si ha quindi:

$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\substack{k\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\varepsilon}^{k} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Ponendo $t = \sqrt{x}$ si ha: $x = t^2$ e $dx = 2tdt$.

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{-t}}{\cancel{t}} 2\cancel{t} dt = 2\int e^{-t} dt = -2e^{-t}$$

e quindi

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\substack{k\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\varepsilon}^{k} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\substack{k\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} 2\left[-e^{-\sqrt{x}}\right]_{\varepsilon}^{k} = \lim_{\substack{k\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} 2\left[-e^{-\sqrt{k}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}}\right] = 2$$