Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Fisica Indirizzo Tecnologie per l'Innovazione
Parziale di CALCOLO
27 febbraio 2009

1) Data la funzione f : R→R definita da:

$$f(x)=\frac{e^{x+2}-1}{6+x-x^2}$$

a) se ne determini il dominio
b) si individuino le discontinuità (classificandole)
c) si studi il segno della funzione
d) si studi la derivabilità e se ne calcoli il valore.

Soluzione

a) Dominio $x\neq -2$, $x\neq 3$.

b) In $x=-2$ c'è una discontinuità eliminabile in quanto $\lim\limits_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{6+x-x^2}=\frac{1}{5}$; in $x=3$ c'è una discontinuità di seconda specie.

3) La funzione è positiva per $x<3$ e negativa per $x>3$.

d) Per $x\neq -2$ e $x\neq 3$ si ha: $f'(x)=\frac{e^{x+2}\left(5+3x-x^2\right)+1-2x}{\left(6+x-x^2\right)^2}$. Utilizzando il teorema de L'Hopital si dimostra che $\lim\limits_{x\to -2}\frac{e^{x+2}\left(5+3x-x^2\right)+1-2x}{\left(6+x-x^2\right)^2}=\frac{7}{50}$ quindi la funzione è derivabile in $x=-2$ e $f'(-2)=\frac{7}{50}$. Essendo $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x+2}\left(5+3x-x^2\right)+1-2x}{\left(6+x-x^2\right)^2}=+\infty$ la funzione è derivabile per ogni $x\neq 3$.

2) Si tracci il grafico della funzione

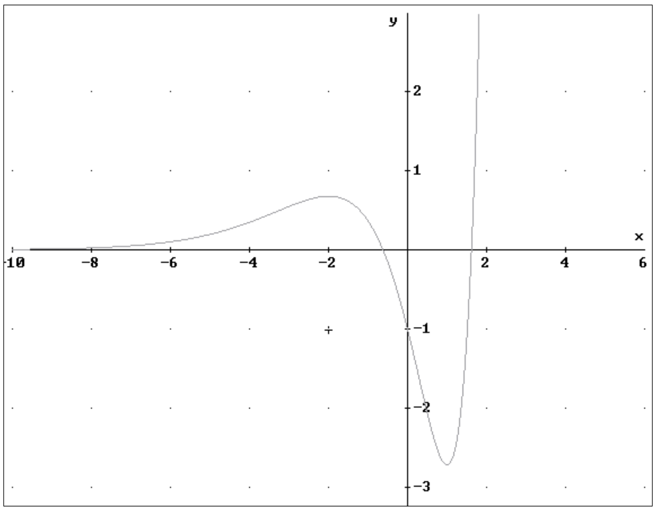
$$f(x)=e^x\left(x^2-x-1\right)$$

mettendone in evidenza i massimi e i minimi e i punti di flesso.
Si calcoli la tangente nel punto di ascissa nulla.

Soluzione

Il dominio della funzione è tutto l'asse reale. La funzione si annulla per $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ed è positiva all'esterno di tale intervallo. Si ha: $f(0)=-1$ e $\lim\limits_{x\to -\infty}e^x\left(x^2-x-1\right)=0$, quindi l'asse delle

x è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} e^x\left(x^2-x-1\right)=+\infty$ e poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(x^2-x-1\right)}{x}=+\infty$ non ci sono asintoti né orizzontali né obliqui per $x \to +\infty$.



La derivata prima è $f'(x)=e^x\left(x^2+x-2\right)$ che risulta positiva per $x<-2$ e $x>1$, negativa per $-2<x<1$; il punto $x=-2$ è quindi un massimo relativo con $f(-2)=5e^{-2}$ e il punto $x=1$ è un punto di minimo relativo e anche assoluto $f(1)=-e$.

La derivata seconda è $f''(x)=e^x\left(x^2+3x-1\right)$ che risulta positiva per $x<-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ e $x>-\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ quindi la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto; negativa per $-\frac{3+\sqrt{13}}{2}<x<-\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ quindi ha la concavità rivolta verso il basso; i punti $x=-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ e $x=-\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ sono punti di flesso.

L'equazione della tangente in x = 0 è $y=f(0)+f'(0)x$ da cui segue: $y=-2x-1$.

3) Calcolare i seguenti integrali:

a) [punti 3] $\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+5}dx$

b) [punti 3] $\int ln\left(x^2-1\right)dx$

Soluzione

3a) Essendo $\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+5}=x+4+2\frac{4x-9}{x^2-4x+5}$ si ha:

$$\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+5}dx=\int (x+4)\,dx+2\int \frac{4x-9}{x^2-4x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+4x+2\left[2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx-\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+4x+4ln\left(x^2-4x+5\right)-2\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+4x+4ln\left(x^2-4x+5\right)-2arctg\,(x-2)+C$$

3b) Per parti, ponendo : $f(x) = ln(x^2-1)$ e $g'(x) = 1$ da cui segue $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ e $g(x) = x$, e quindi:

$$\int ln(x^2-1)\,dx = x\,ln(x^2-1) - 2\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = x\,ln(x^2-1) - 2\int\left[1+\frac{1}{x^2-1}\right]dx =$$

$$= x\,ln(x^2-1) - 2x - 2\int \frac{1}{x^2-1}dx$$

Ma $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{x(A+B)+(A-B)}{x^2-1}$ quindi $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$ da cui segue: $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Si ha

$$\int ln(x^2-1)\,dx = x\,ln(x^2-1) - 2x - 2\int\frac{1}{x^2-1}dx = x\,ln(x^2-1) - 2x - 2\left(\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx\right) =$$

$$= x\,ln(x^2-1) - 2x - ln(x-1) + ln(x+1) = x\,ln(x^2-1) + ln\frac{x+1}{x-1} - 2x + C$$

4) Dimostrare, in base ai criteri, che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x-2}}$$

converge e calcolarne il valore.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x-2}}$, per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine 3/2, infatti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2x+1)\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}}{(2x+1)\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{(2x+1)^2(x-2)}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x^3-4x^2-7x-2}} = \frac{1}{2},$$

mentre per $x \to 2$ è infinita di ordine 1/2, infatti

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(2x+1)\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{(x-2)^{1/2}}} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(2x+1)} = \frac{1}{5}$$. La funzione va all'infinito anche per $x \to -\frac{1}{2}$, ma tale valore è al di fuori dell'intervallo di integrazione. L'integrale converge in entrambi i casi.
Si ha quindi:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x-2}} = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}}\int_{2+\varepsilon}^{k}\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x-2}}$$. Ponendo $t = \sqrt{x-2}$ si ha: $x = t^2+2$ e $dx = 2tdt$.

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x-2}}=\int\frac{2\cancel{t}\,dt}{\left(2t^2+4+1\right)\cancel{t}}=2\int\frac{dt}{\left(2t^2+5\right)}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}t\right)^2+1}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\int\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}dt}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}t\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{5}}arctg\left(\sqrt{\frac{2}{5}}t\right)=\sqrt{\frac{2}{5}}arctg\sqrt{\frac{2}{5}(x-2)}$$

e quindi

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x-2}}=\lim_{\substack{k\to\infty\\ \varepsilon\to0^+}}\int_{2+\varepsilon}^{k}\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x-2}}=\lim_{\substack{k\to\infty\\ \varepsilon\to0^+}}\sqrt{\frac{2}{5}}\left[arctg\sqrt{\frac{2}{5}(x-2)}\right]_{2+\varepsilon}^{k}=$$

$$=\lim_{\substack{k\to\infty\\ \varepsilon\to0^+}}\sqrt{\frac{2}{5}}\left[arctg\sqrt{\frac{2}{5}(k-2)}-arctg\sqrt{\frac{2}{5}(\varepsilon)}\right]=\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{10}}$$