Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Fisica – Indirizzo Tecnologie per l'Innovazione
Parziale di CALCOLO 3 – 21 luglio 2008

SOLUZIONI

1) Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 6x - 17}{x^2 + 2x + 4}$.

Dividendo si ottiene $f(x) = 3x - 4 + \dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}$ che può ulteriormente scomposta in $f(x) = 3x - 4 + \dfrac{2x+2}{x^2+2x+4} - 3\dfrac{1}{x^2+2x+4}$.

Integrando i singoli termini si ha: $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x + ln\left(x^2 + 2x + 4\right) - \sqrt{3}arctg\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

2) Determinare il dominio della seguente funzione: $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{y}{x^2 + y^2 - 4}} + ln(1 - xy)$.

Si deve risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} \dfrac{y}{x^2 + y^2 - 4} \geq 0 \\ 1 - xy > 0 \end{cases}$.

La prima disequazione è soddisfatta quando numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. Il numeratore è positivo nel semipiano positivo delle *y*; il denominatore è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 ed è positivo all'esterno della circonferenza. Il grafico di figura 1 mostra la soluzione (la parte in chiaro) della prima disequazione; sono compresi tutti i punti dell'asse *x* ad eccezione dei punti di coordinate (-2,0) e (2,0) in cui la circonferenza incontra l'asse *x*. La seconda disequazione viene risolta riconoscendo che da essa si ricava l'equazione $y = \dfrac{1}{x}$ che è l'iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani e si dimostra che è soddisfatta nella zona compresa tra le due curve; in fugura 2 la soluzione è la parte in chiaro. Nella figura 3, in chiaro, viene rappresentato il dominio della funzione che si ricava dall'intersezione delle soluzioni delle due disequazioni: fa parte del domino anche l'asse *x*, ad eccezione dei suddetti punti, mentre ne sono escluse la circonferenza e l'iperbole.

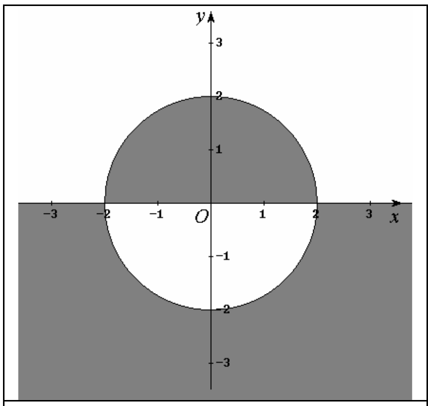
Figura 1

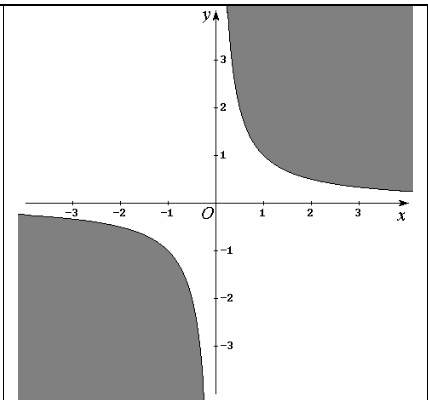
Figura 2

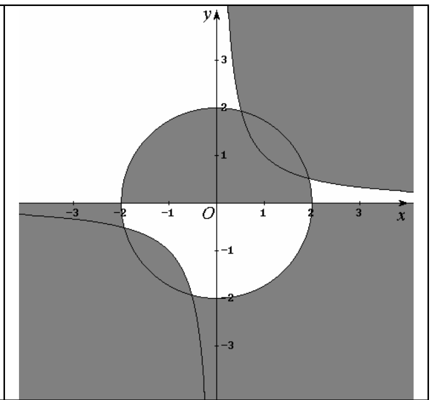
Figura 3

3) Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Per determinare i punti stazionari della funzione data si deve risolvere il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$.

Essendo $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_y = 3y^2 - 6x$, si ha $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $O(0,0)$ e $P(2,2)$. Per studiare la natura di tali punti bisogna calcolare l'hessiano della funzione; essendo $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$ e $f_{xy} = -6$ si ha $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix} = 36(xy-1)$. Essendo $H(0,0) = -36 < 0$ l'origine è un punto di sella; essendo $H(2,2) = 108 > 0$ e $f_{xx}(2,2) = 12 > 0$, il punto P è un minimo $f(2,2)=4$.

4) Posta la sfera S con il centro nell'origine di in un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, si deve calcolare l'integrale triplo $M = k\iiint\limits_S e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$. Passando in coordinate sferiche si ha: $M = k\int_0^1 \rho^2 e^{-\rho} d\rho \int_0^\pi sen\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$. Gli integrali possono essere calcolati separatamente: il primo si calcola per parti $\int \rho^2 e^{-\rho} d\rho = -e^{-\rho}\left(\rho^2 + 2\rho + 2\right)$ e quindi $\int_0^1 \rho^2 e^{-\rho} d\rho = 2 - 5e^{-1}$, il secondo $\int_0^\pi sen\theta d\theta = \left[-cos\,\theta\right]_0^\pi = 2$ e il terzo $\int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 2\pi$. In definitiva si ha: $M = 4\pi\left(2 - 5e^{-1}\right)k$.

5) (a) È un'equazione differenziale lineare del primo ordine che ridotta in forma normale si scrive nella forma: $y' - 2xy = x^3$, si ha quindi $y(x) = e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)} b(x)\,dx + c\right]$ dove $A(x) = -2\int x dx = -x^2$ e $b(x) = x^3$. Si ha: $y(x) = e^{x^2}\left[\int e^{-x^2} x^3 dx + c\right]$. Dopo aver calcolato per parti l'integrale ed aver ottenuto $\int e^{-x^2} x^3 dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\left(x^2 + 1\right)$, si ha $y(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right) + ce^{x^2}$.

(b) L'equazione $\left(1+x^2\right)y' = xy$ è a variabili separabili, infatti può essere scritta nella forma: $\frac{1}{y}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$. Integrando separatamente si ha $ln|y| = \frac{1}{2}ln\left(1+x^2\right) + c$ da cui segue: $y = k\sqrt{1+x^2}$.

(c) È un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione dell'omogenea è $\overline{y}(x) = c_1 + c_2 e^x$. Il termine noto è del tipo $g(x) = e^{\alpha x}\left[C(x)cos(\beta x) + D(x)sen(\beta x)\right]$ con $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $C(x) = 4$, $D(x) = 3$. Poiché $\alpha + i\beta = 2 + i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y^*(x) = e^{2x}\left(a\,cos\,x + bsenx\right)$ con a e b costanti da determinare. Derivando si ottiene: $y^{*\prime}(x) = e^{2x}\left[(2a+b)cos\,x + (2b-a)senx\right]$; derivando una seconda volta si ha: $y^{*\prime\prime}(x) = e^{2x}\left[(3a+4b)cos\,x + (3b-4a)senx\right]$ sostituendo nell'equazione si ottiene: $e^{2x}\left[(a+3b)cos\,x + (b-3a)senx\right] = e^{2x}\left(4cos\,x + 3senx\right)$ da cui si ricava il sistema $\begin{cases} a + 3b = 4 \\ b - 3a = 3 \end{cases}$ che dà: $a = -\frac{1}{2}$ e $a = \frac{3}{2}$. La soluzione particolare è quindi: $y^*(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}\left(cos\,x - 3senx\right)$ e quindi l'integrale generale è: $y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\left(cos\,x - 3senx\right)$.