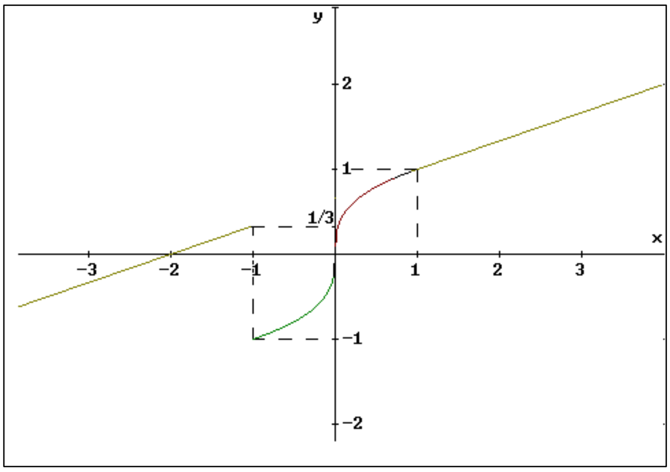
Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Fisica – Indirizzo Tecnologie per l'Innovazione
1° parziale di Calcolo
11 dicembre 2007

SOLUZIONE

1) La funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+2) & x<-1, x>1\\ \sqrt[3]{x} & -1\le x\le 1\end{cases}$ è definita e continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ diversi da ±1. Per $x = -1$ si ha: $f(-1)=-1$, ma

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{3}(x+2)=\frac{1}{3}\ne f(-1)$,
quindi la funzione non è continua.
Per $x = 1$ si ha: $f(1)=1$ e
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{3}(x+2)=1=f(1)$,
quindi la funzione è continua.



Per la derivabilità si osservi innanzi tutto che, per $x = -1$, essendo la funzione non continua, non sarà derivabile. Calcolando la derivata si ha che la funzione non è derivabile neanche in $x = 0$, si ha infatti: $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x<-1, x>1\\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & -1\le x\le 1, x\ne 0\end{cases}$ e quindi si annulla il denominatore della frazione. Resta da vedere la derivabilità in $x = 1$. Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$, si ha: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$. Essendo quindi questi limiti uguali, la funzione è derivabile.
Concludendo: la funzione, definita in $\mathbb{R}$, è continua in $\mathbb{R} - \{-1\}$ e derivabile in $\mathbb{R} - \{-1,0\}$

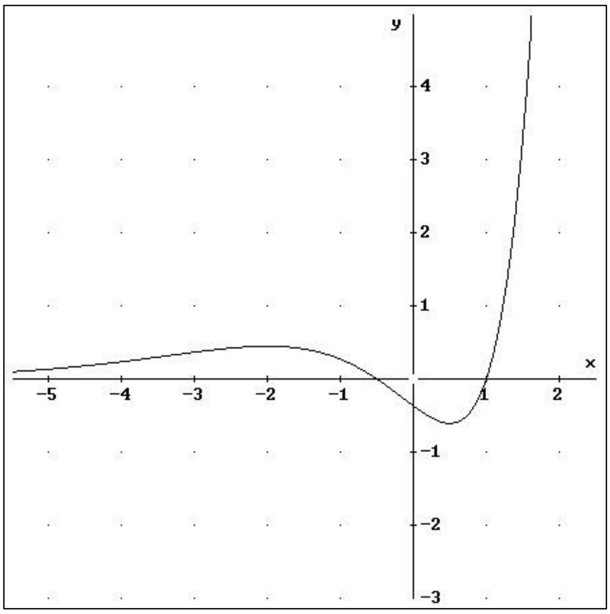
2) A) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-1)}{\cancel{x-1}}=0$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2senx+x\cos x}{3tgx-5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2senx+x\cos x}{x}}{\frac{3tgx-5x^2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2senx}{x}+\frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}}}{\frac{3tgx}{x}-5\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}}=\frac{2+1}{3}=1$

3) La funzione $f(x)=(2x^2-x-1)e^{x-1}$ è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Non è né pari né dispari. È positiva per $x < -½$ e $x > 1$, negativa per $-½ < x < 1$, $f(x) = 0$ per $x = -½$ e $x = 1$. Si ha $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x-1)e^{x-1}=0$, quindi $y = 0$ (l'asse x) è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, e

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-x-1\right)e^{x-1}=+\infty$. Essendo inoltre $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)e^{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\dfrac{1}{x}\right)e^{x-1}=+\infty$ la funzione non ha né asintoti orizzontali né asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

La derivata prima della funzione è $f'(x)=\left(2x^2+3x-2\right)e^{x-1}$ che risulta positiva per $x < -2$ o $x > ½$, negativa per $½ < x < -2$. $f'(x) = 0$ per $x = -2$ e $x = ½$. Pertanto la funzione è crescente per $x < -2$ e $x > ½$, decrescente per $½ < x < -2$, in $x = -2$ c'è un massimo e in $x = ½$ c'è un minimo. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\sqrt{e}$ e $f(-2)=9e^{-3}$.



Calcoliamo la derivata seconda: $f''(x)=\left(2x^2+7x+1\right)e^{x-1}$ che risulta positiva per $x<\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}$ e $x>\dfrac{-7+\sqrt{41}}{4}$, negativa per $\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}<x<\dfrac{-7+\sqrt{41}}{4}$ e $f''(x) = 0$ per $x=\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}$ e $x=\dfrac{-7+\sqrt{41}}{4}$. Pertanto la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per per $x<\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}$ e $x>\dfrac{-7+\sqrt{41}}{4}$, verso il basso per $\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}<x<\dfrac{-7+\sqrt{41}}{4}$ e in $x=\dfrac{-7-\sqrt{41}}{4}$ e $x=\dfrac{-7+\sqrt{41}}{4}$ ci sono due punti di flesso.

4) Si consideri lo sviluppo $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$, il resto sia nella forma di Lagrange $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$. Si ha: $R_n(0{,}1)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0{,}1)^{n+1}$ con $0 < c < 0{,}1$. Essendo $f^{(n)}(x)=e^x$ per ogni n, si ha che $f^{(n)}(c)=e^c<3$. Deve quindi essere $R_n(0{,}1)<\dfrac{3}{(n+1)!}(0{,}1)^{n+1}<10^{-5}$ ovvero $\dfrac{3}{(n+1)!}\dfrac{1}{10^{n+1}}<10^{-5}$ da cui segue: $(n+1)!\,10^{n+1}>3\cdot10^5$ che è soddisfatta per $n \geq 4$. Si ha quindi il risultato voluto prendendo il polinomio di Taylor di grado 4. $e^{0{,}1}=1+0{,}1+\dfrac{0{,}1^2}{2!}+\dfrac{0{,}1^3}{3!}+\dfrac{0{,}1^4}{4!}=1{,}10517$.

5) A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1-x}{x^2+1}}}$ è una serie armonica generalizzata e converge se $\dfrac{1-x}{x^2+1}>1$. Segue $\dfrac{\cancel{1}-x-x^2\cancel{-1}}{x^2+1}>0$, $\dfrac{x+x^2}{x^2+1}<0$ ovvero $x+x^2<0$. Da ciò si ottiene che la serie converge per

$-1 < x < 0$ e diverge per $x < -1$ o $x > 0$. Per $x = -1$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$, quindi diverge; per $x = 0$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (la serie armonica) che diverge. In conclusione la serie converge per $-1 < x < 0$, diverge altrimenti.

B) Utilizzando il criterio della radice si ha che la serie converge se: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{nx^2+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{nx^2+1} = \frac{1}{x^2} < 1$ da cui segue che deve essere $x^2 > 1$, ovvero $x < -1$ o $x > 1$. La serie diverge se $-1 < x < 1$. Per $x = \pm 1$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; si dimostra facilmente che non converge perché il termine generale non tende a zero, infatti $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$.