Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Tecnologie per l'Innovazione
III parziale di CALCOLO
4 ottobre 2007

SOLUZIONI

1) Facendo uso del polinomio di Taylor delle funzioni $senx$, $cosx$ ed e^x si calcolino i primi tre termini del polinomio di Taylor dei seguenti prodotti:
   a) $e^x senx$
   b) $e^x cos\, x$

Consideriamo i primi termini del polinomio di Taylor delle funzioni assegnate:

$$senx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_n$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_n$$

Si ha:

$$e^x senx = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_n\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_n\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + R_n$$

$$e^x cos\, x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_n\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_n\right) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + R_n$$

2) Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{6x^3 + 12x^2 + 18x + 7}{x^2 + 2x + 2}$.

Dividendo si ottiene $f(x) = 6x + \dfrac{6x + 7}{x^2 + 2x + 2}$ che può ulteriormente scomposta in $f(x) = 6x + 3\dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$.

Integrando i singoli termini si ha: $F(x) = 3x^2 + 3ln\left(x^2 + 2x + 2\right) + arctg(x + 1) + c$

3) Si calcoli la seguente funzione integrale: $F(x) = \int_2^x 3te^{-t}dt$

Integrando per parti si ottiene: $F(x) = \left[-3e^{-t}(t + 1)\right]_2^x = -3e^{-x}(x + 1) + 9e^{-2}$

4) Se $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$, mostrare che $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Si devono calcolare le derivate seconde della funzione. Per prima cosa calcoliamo le derivate prime, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y^2}{(x - y)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x - y)^2},$$

quindi le derivate seconde, si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y^2}{(x-y)^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2x^2}{(x-y)^3} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{2xy}{(x-y)^3}.$$

Segue quindi che

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2\frac{2y^2}{(x-y)^3}-2xy\frac{2xy}{(x-y)^3}+y^2\frac{2x^2}{(x-y)^3}=0$$

5) Determinare il dominio della seguente funzione: $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y}{x^2+y^2-6x}}+ln\left(1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}\right)$.

Si deve risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2-6x}\geq 0 \\ 1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}>0 \end{cases}$.

La prima disequazione è soddisfatta quando numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. Il denominatore è la circonferenza di centro (3,0) e raggio 3 (passa quindi per l'origine) ed è positivo all'esterno della circonferenza. Il grafico di figura 1 ci mostra la soluzione (la parte in chiaro) dove sono compresi tutti i punti dell'asse x ad eccezione dell'origine e del punto di coordinate (6,0) in cui la circonferenza incontra l'asse. La seconda disequazione viene risolta riconoscendo che l'equazione $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ad essa associata, è una ellisse di centro l'origine , semiasse maggiore 3 e semiasse minore 2; inoltre la disequazione può essere messa nella forma $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1$ la cui soluzione sono i punti del piano interni all'ellisse (figura 2). Nella figura 3, in bianco, viene quindi rappresentato il dominio della funzione dato dall'intersezione delle soluzioni delle due disequazioni: ne fanno parte anche i punti dell'asse x che non stanno sull'ellisse o sulla circonferenza [(–3,0); (0,0); (3,0); (6,0)].

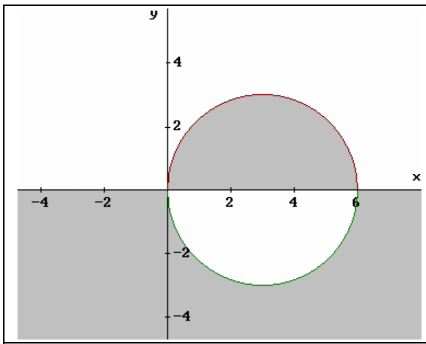

Figura 1

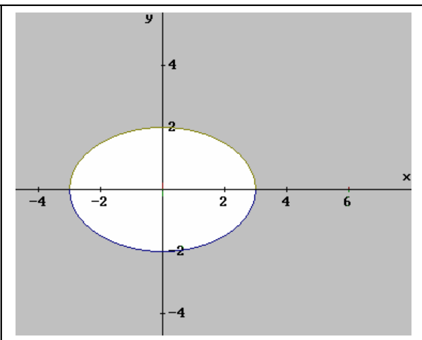

Figura 2

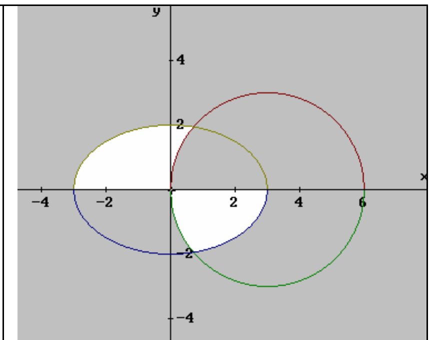

Figura 3

6) Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Per determinare i punti stazionari della funzione data si deve risolvere il sistema $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$.

Essendo $f_x=3x^2-3y$, $f_y=3y^2-3x$, si ha $\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $O(0,0)$ e $P(1,1)$. Per studiare la natura di tali punti bisogna calcolare l'hessiano della funzione; essendo

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$ e $f_{xy} = -3$ si ha $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} = 36xy - 9$. Essendo $H(0,0) = -9 < 0$ l'origine è un punto di sella; essendo $H(1,1) = 27 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, il punto P è un minimo $f(1,1)=-1$.