Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Tecnologie per l'Innovazione
III parziale di CALCOLO
17 luglio 2007

SOLUZIONI

1) Facendo uso del polinomio di Taylor delle funzioni $senx$, $cosx$ ed e^x si calcoli $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^x-(1+senx)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{e^x-(1+senx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+R_n\right)-1}{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_n\right)-1-\left(x-\frac{x^3}{6}+R_n\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+R_n}{\cancel{1}\cancel{+x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_n\cancel{-1}\cancel{-x}+\frac{x^3}{6}+R_n}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+R_n}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_n}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{R_n}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{R_n}{x^2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-1$$

2) Calcolare la primitiva della funzione $f(x)=\frac{4x^3-15x^2+20x-2}{x^2-4x+5}$.

Dividendo si ottiene $f(x)=4x+1+\frac{4x-7}{x^2-4x+5}$ che può ulteriormente scomposta in $f(x)=4x+1+2\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+\frac{1}{x^2-4x+5}$.

Integrando i singoli termini si ha: $F(x)=2x^2+x+2ln\left(x^2-4x+5\right)+arctg\,(x-2)+c$

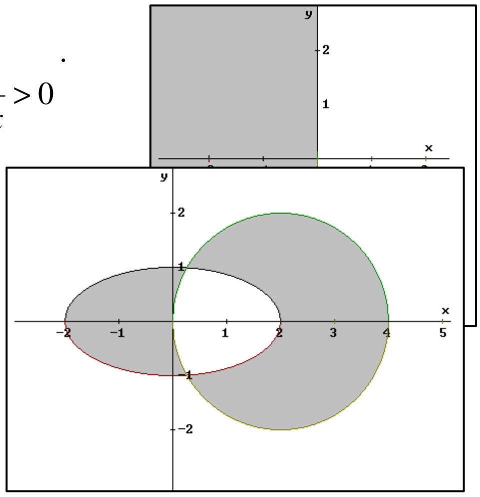
3) Calcolare, se esiste, $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{e^y-x}{y-x+1}$

Se consideriamo una retta che passa per il punto (1,0), ad esempio $x = 1$ (una qualunque retta per (1,0) ha equazione $y-0=m(x-1)$, cioè $y=mx-m$), si dimostra che il limite vale 1: infatti $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y-1+1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$. Questo risultato vale per ogni retta (ad eccezione della retta $y-x+1$ sulla quale la funzione non è definita) infatti si ha $\lim_{x\to 1}\frac{e^{m\cdot x-m}-x}{mx-m-x+1}=$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{me^{m\cdot x-m}-1}{m-1} = \dfrac{m-1}{m-1} = 1$. Lungo la curva $x = e^y$ la funzione è però identicamente nulla e quindi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. Si conclude che $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{e^y - x}{y - x + 1}$ non esiste.

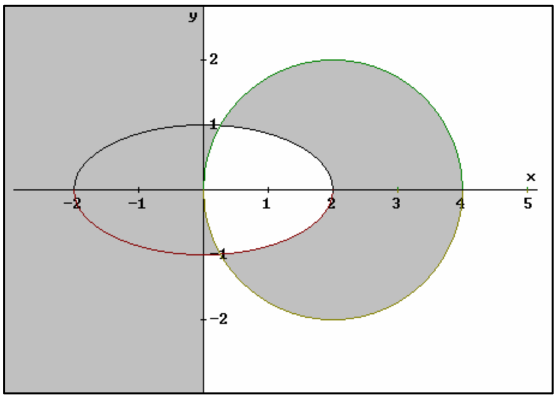
4) Determinare il dominio della seguente funzione: $f(x,y) = \sqrt{x} + ln \dfrac{\frac{x^2}{4} + y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 4x}$.

Si deve risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{\frac{x^2}{4} + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 4x} > 0 \end{cases}$.



La prima disequazione è soddisfatta per $x \ge 0$, ossia per i punti del piano che hanno ascissa positiva o nulla (i punti del primo e quarto quadrante , asse *y* compreso). Per risolvere la seconda disequazione bisogna vedere quando il numeratore e il denominatore hanno lo stesso segno. Il numeratore, al quale associamo l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, risulta maggiore di zero nei punti del piano esterni alla curva e minore di zero nei punti interni; sulla curva si ha zero. Il denominatore, al quale associamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$ con centro nel punto (2,0) e raggio 2, risulta maggiore di zero nei punti del piano esterni alla curva e minore di zero nei punti interni; sulla circonferenza il denominatore è zero e quindi la funzione non esiste. La seconda disequazione è quindi soddisfatta in tutti i punti del piano che sono contemporaneamente interni o esterni alle due curve.

Nel disegno, in bianco viene rappresentato il dominio della funzione: ne fanno parte anche i punti dell'asse *y* che non stanno sull'ellisse (0,–1) e (0,1) o sulla circonferenza (0,0).



5) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ nella regione $x^2 + y^2 - 2x - 8 \le 0$.

La regione in questione è il cerchio di centro *C*(1,0) e raggio *r* = 3. Per prima cosa determiniamo i massimi e i minimi relativi interni al cerchio. Deve essere $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ed essendo $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, si ha che il sistema è soddisfatto (0,0) (interno al cerchio). Essendo $f_{xx} = 2 > 0$, $f_{yy} = 2$ e $f_{xy} = 0$ si ha $H(x,y) = 4 > 0$ e quindi abbiamo un punto di minimo $f(0,0) = 0$. Per determinare i punti di massimo e di minimo sulla circonferenza utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ha:

$L(x, y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 8)$;

$L_x = 2x + \lambda(2x - 2)$, $L_y = 2y + 2\lambda y$, $L_\lambda = x^2 + y^2 - 2x - 8$. Per ci il sistema $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases}$ è soddisfatto nei punti $P_1(-2,0,-2/3)$ e $P_2(4,0,-4/3)$.

L'hessiano orlato è dato da $D = \begin{vmatrix} 0 & 2x-2 & 2y \\ 2x-2 & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = -8(1+\lambda)(x^2 + y^2 - 2x + 1)$.

Si ha quindi: $D(P_1) = -24 < 0$, minimo con $f(P_1) = 4$; mentre $D(P_2) = 24 > 0$, massimo con $f(P_2)= 16$. In conclusione il punto (0,0) è il minimo assoluto, mentre il punto (4,0) è il massimo assoluto.