Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Tecnologie per l'Innovazione
II Parziale di CALCOLO
17 luglio 2007

1) [punti 6] Determinare il dominio della funzione $f(x) = ln\left(x^2+2x-3\right)\cdot\sqrt{x^2-x-2}$.

Il dominio della funzione è dato da $D=\left\{x\in\mathbb{R} : x^2+2x-3>0 \; e \; x^2-x-2\geq 0\right\}$, ovvero la soluzione del sistema di disequazioni $\begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x^2-x-2\geq 0\end{cases}$. La prima disequazione è soddisfatta per $x < -3$ o $x > 1$; la seconda disequazione è soddisfatta per $x \leq -1$ o $x \geq 2$. Si ha quindi che il dominio della funzione è dato $D=\left\{x\in\mathbb{R} : x<-3 \; o \; x\geq 2\right\}$.

2) [punti 6] Utilizzando i teoremi sui limiti (non si deve utilizzare il teorema di de L'Hôpital) calcolare $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x-1}$

Scomponendo il numeratore della frazione si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-4(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2-4\right)}{\cancel{x-1}} = -3$$

3) [punti 8] Determinare concavità e flessi della funzione $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

La derivata prima della funzione è: $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, la derivata seconda:

$$f''(x)=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Innanzi tutto si osserva che $f''(x) = 0$ per $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. Lo studio del segno conduce al seguente risultato

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$ x

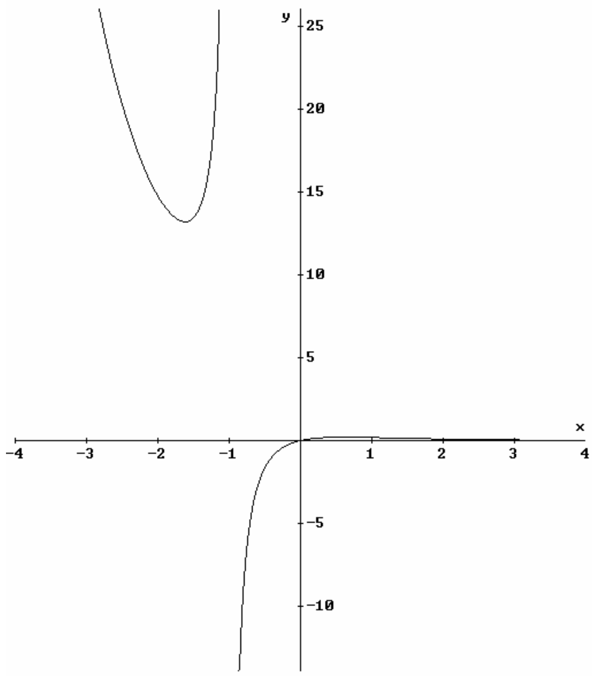
$- - -\ 0 + + + +0 - - - -\ 0 + + + +$

$\cap$ flesso $\cup$ flesso $\cap$ flesso $\cup$

La funzione ha quindi la concavità rivolta verso il basso per $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$, rivolta verso l'alto per $-\sqrt{3} < x < 0$ e $x > \sqrt{3}$.

4) [punti 10] Tracciare il grafico approssimativo della funzione: $f(x)=\frac{x}{x+1}e^{-x}$. Si calcoli la derivata seconda ma se ne tralasci lo studio del segno.

Il dominio della funzione è $D=\{x\in\mathbb{R} : x\neq -1\}$. Lo studio del segno, che dipende solo dalla frazione $\frac{x}{x+1}$, conduce al grafico:



-1 $\quad\quad$ 0 $\quad$ x

N– – – – – – – – – – – – – 0 + + + + +

D – – – 0 + + + + + + + + + + + + +

+ + + $\quad$ – – – – – – – 0 + + + + +

Per cui si ha: $f(x) > 0$ per $x < -1$ o $x > 0$, $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e la funzione si annulla per $x = 0$.

Si ha $\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{x}{x+1}e^{-x} = \mp\infty$, quindi $x = -1$ è un asintoto verticale.

Inoltre $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x+1}e^{-x} = +\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x+1}e^{-x} = +\infty$, quindi per $x \to -\infty$ non ci sono asintoti, mentre si ha: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1}e^{-x} = 0$, quindi c'è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

La derivata prima della funzione è: $f'(x) = -\frac{e^{-x}\left(x^2+x-1\right)}{(x+1)^2}$.

Lo studio del segno, che dipende solamente dal termine x^2+x-1, e tenendo conto del segno – davanti all'espressione, si ha il seguente grafico:

$\left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ $\quad$ $\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ $\quad$ x

– – – 0 + + + + + + +0 – – – – – –

↘ min ↗ max ↘

Per $x = -1$ neanche la derivata è definita. Pertanto la funzione è: decrescente per $x < \left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ e $x > \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$, crescente per $\left(-1-\sqrt{5}\right)/2 < x < -1$ e $-1 < x < \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$, ha un minimo relativo in $x = \left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ con $f(\left(-1-\sqrt{5}\right)/2) \approx 13{,}2$ e un massimo relativo in $x = \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ con $f(\left(-1+\sqrt{5}\right)/2) \approx 0{,}21$.

La derivata seconda è: $f'(x) = \frac{e^{-x}\left(x^3+2x^2-x-4\right)}{(x+1)^3}$.