Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Tecnologie per l'Innovazione
II Parziale di CALCOLO
28 giugno 2007

1) [punti 4] Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 3x}}$.

Il dominio della funzione è dato da $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0 \ e \ x^2 - 3x > 0\}$, ovvero la soluzione del sistema di disequazioni $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases}$. La prima disequazione è soddisfatta per $x < 1$ o $x > 2$; la seconda disequazione è soddisfatta per $x < 0$ o $x > 3$. Si ha quindi che il dominio della funzione è dato $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \ o \ x > 3\}$.

2) [punti 4] Si dimostri che non esiste $\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$.

Bisogna dimostrare che $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$. La funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$, per $x = 1$, non è definita in quanto si annulla il denominatore dell'esponente. Studiando il segno dell'esponente si vede facilmente che esso è negativo per $x < 1$ e positivo per $x > 1$ e si annulla appunto per $x = 1$. Si ha quindi che $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$. Ricordando che $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, si ha: $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$. Ciò dimostra quanto richiesto.

3) [punti 4] Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

La funzione non ammette asintoti verticali in quanto non esiste x_0 tale che: $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x^2 - 1} = \infty$. Inoltre si ha: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$, quindi non ci sono asintoti orizzontali. Per cercare asintoti obliqui si calcola: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \pm 1$ e

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} \mp x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} \mp x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} \pm x\right)}{\sqrt{x^2 - 1} \pm x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(x^2 - 1 - x^2\right)}{\sqrt{x^2 - 1} \pm x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} \pm x} = 0$$

Ci sono quindi due asintoti obliqui che hanno equazioni: $y = x$ per $x \to +\infty$ e $y = -x$ per $x \to -\infty$

4) [punti 4] Si determini l'equazione della tangente alla curva di equazione $y = ln^2(2+x) - x$ nel punto di ascissa $x = -1$.

L'equazione della tangente ad una funzione $y = f(x)$ in un punto del dominio x_0, è data da: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Si ha quindi:

$f(-1) = ln^2(2-1) - (-1) = 1$;

$f'(x) = 2\,ln(2+x)\dfrac{1}{2+x} - 1$ da cui $f'(-1) = 2\,ln(2-1)\dfrac{1}{2-1} - 1 = -1$.

L'equazione cercata è:

$y = 1 - (x+1) = -x$

5) [punti 14] Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$. Si scrivano in particolare le equazioni degli asintoti e le ascisse dei punti di massimo, di minimo e di flesso.

Il dominio della funzione o tutto $\mathbb{R}$ e la funzione è sempre positiva, tranne che per $x = 0$ in cui si annulla.

Inoltre si ha $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$, e che applicando la regola di de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

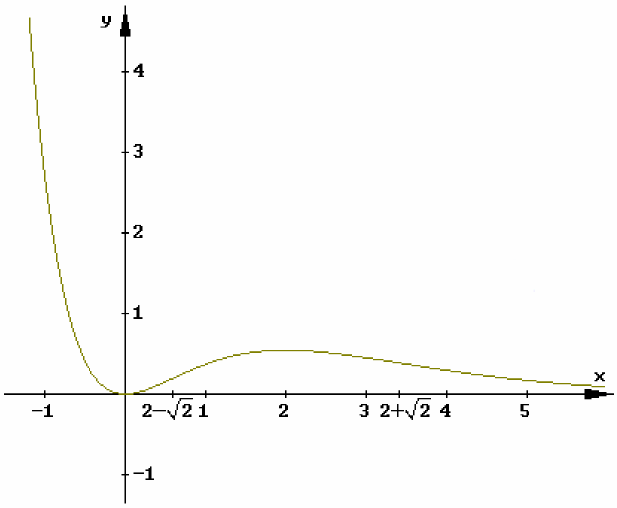
.

La funzione ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

La derivata prima della funzione è:

$f'(x) = xe^{-x}(2-x)$.

Lo studio del segno conduce al seguente grafico:



$$\begin{array}{cccccc} & 0 & & 2 & & x \\ \hline - - - & 0 & + + + + + + & +0 & - - - - - - - & \\ \searrow & \text{min} & \nearrow & \text{max} & \searrow & \end{array}$$

La funzione è quindi: decrescente per $x < 0$ e $x > 2$, crescente per $0 < x < 2$, ha un minimo in x=0 ($f(0) = 0$) e un massimo in $x = 2$ ($f(2) = 4e^{-2}$).

La derivata seconda è: $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$ E risulta positiva per $x < 2 - \sqrt{2}$ o $x > 2 + \sqrt{2}$ (concavità rivolta verso l'alto), negativa per $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ (concavità rivolta verso il basso). La derivata seconda si annulla per $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$ che sono quindi punti di flesso.