Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Tecnologie per l'Innovazione
III parziale di CALCOLO
14 giugno 2007

SOLUZIONI

A) – Utilizzo del polinomio di Taylor

1) Facendo uso del polinomio di Taylor delle funzioni $f\left(x\right)=senx$ e $g\left(x\right)=e^{x}$ si calcoli $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{e^{x}-1-x-\dfrac{x^{2}}{2}}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{e^{x}-1-x-\frac{x^{2}}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+R_{n}\right)}{\left(1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3!}+R_{n}\right)-1-x-\frac{x^{2}}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cancel{-x}+\frac{x^{3}}{3!}+R_{n}}{\cancel{1}\cancel{+x}+\cancel{\frac{x^{2}}{2}}+\frac{x^{3}}{3!}+R_{n}\cancel{-1}\cancel{-x}-\cancel{\frac{x^{2}}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{3}}{3!}+R_{n}}{\frac{x^{3}}{3!}+R_{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{R_{n}}{x^{3}}}{\frac{1}{6}+\frac{R_{n}}{x^{3}}}=1$$

2) Calcolare il valore di $e^{0,1}$ con un errore minore di 10^{-4}.

Deve essere $\left|R_{n}\right|=\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_{0}\right)^{n+1}\right|=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}0,1^{n+1}<\dfrac{3}{(n+1)!}0,1^{n+1}<10^{-4}$; per tentativi si prova che tale disuguaglianza è verificata per n = 4. Si ha quindi:

$$e^{0,1}=1+0,1+\frac{0,1^{2}}{2}+\frac{0,1^{3}}{6}+\frac{0,1^{4}}{24}=1+0,1+0,005+0,0001666...+0,000004166..=1,105170833$$

e le prime quattro cifre dopo la virgola sono esatte.

B) – Integrali delle funzioni di una variabile

1) Tra le primitive della funzione $f\left(x\right)=2x^{3}\ln x$ si determini quella che passa per il punto (1,3)

Integrando per parti si ha: $F\left(x\right)=2\int x^{3}\ln x dx=2\left(\dfrac{1}{4}x^{4}\ln x-\int\dfrac{1}{4}x^{4}\dfrac{1}{x}dx\right)=\dfrac{1}{2}x^{4}\ln x-\dfrac{1}{8}x^{4}+c$.

La primitiva che passa per il punto (1,3) soddisfa la condizione $F(1) = 3$; si ricava quindi $c=\dfrac{25}{8}$. La funzione cercata è $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^{4}\left(\ln x-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{25}{8}$.

2) Calcolare la primitiva della funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^{3}+2x^{2}+3x-1}{x^{2}+2x+2}$.

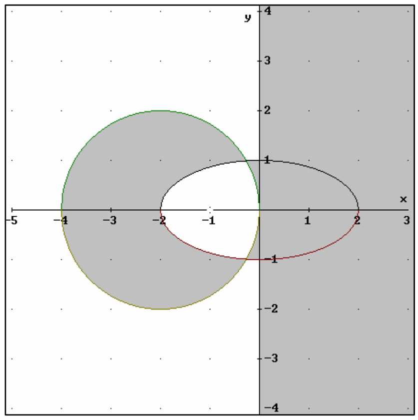
Dividendo si ottiene $f\left(x\right)=x+\dfrac{x-1}{x^{2}+2x+2}$ che può ulteriormente scomposta in $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{x^{2}+2x+2}-\dfrac{2}{x^{2}+2x+2}$. Integrando i singoli termini si ha:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}ln\left(x^2+2x+2\right)-2arctg(x+1)+c$$

C) – Funzioni a due variabili

1) Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{\frac{x^2}{4}+y^2-1}{x^2+y^2+4x}}-ln(-x).$$



Si deve risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{x^2}{4}+y^2-1}{x^2+y^2+4x}\geq 0\\ -x>0\end{cases}.$$

Per risolvere la prima disequazione bisogna vedere quando il numeratore e il denominatore hanno lo stesso segno. Il numeratore, al quale associamo l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, risulta maggiore di zero nei punti del piano esterni alla curva e minore di zero nei punti interni; sulla curva si ha zero. Il denominatore, al quale associamo la circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x=0$ con centro nel punto (–2,0) e raggio 2, risulta maggiore di zero nei punti del piano esterni alla curva e minore di zero nei punti interni; sulla circonferenza il denominatore è zero e quindi la funzione non esiste. Si ha quindi che la prima disequazione è soddisfatta in tutti i punti del piano che sono contemporaneamente interni o esterni alle due curve, o che appartengono solo all'ellisse. La seconda disequazione è soddisfatta per $x < 0$, ossia per i punti del piano che hanno ascissa negativa. Nel disegno, in bianco viene rappresentato il dominio della funzione: ne fanno parte anche i punti dell'ellisse che hanno ascissa negativa e che non stanno sulla circonferenza.

2) Dopo aver dimostrato che $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0$ per $(x,y)\to(0,0)$ lungo un qualunque retta, si verifichi che $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ non esiste.

Lungo le rette di equazione $y = mx$ si ha $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2}=0$;

lungo la retta $x = 0$ si ha $\lim\limits_{y\to 0}\frac{0\cdot y^2}{0+y^4}=0$; mentre lungo le parabole di equazione $x=\pm y^2$ si ha

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left(\pm y^2\right)y^2}{\left(\pm y^2\right)^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{\pm y^4}{y^4+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{\pm y^4}{2y^4}=\pm\frac{1}{2}$$

D) Massimi e minimi per le funziono a due variabili

1) Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y)=y-\frac{x^3}{3}-ln(y-x)$ e stabilirne il tipo.

Per determinare i punti stazionari dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ovvero

$\begin{cases} -x^2 + \dfrac{1}{y-x} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{y-x} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{y-x} = x^2 \\ \dfrac{1}{y-x} = 1 \end{cases}$ da cui segue $x^2 = 1$ e quindi le due soluzioni $P_1(-1,0)$ e $P_2(1,2)$.

Le derivate parziali seconde sono date da $f_{xx} = -2x + \dfrac{1}{(y-x)^2}$, $f_{yy} = \dfrac{1}{(y-x)^2}$, $f_{xy} = -\dfrac{1}{(y-x)^2}$

quindi il determinante hessiano è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -2x + \dfrac{1}{(y-x)^2} & -\dfrac{1}{(y-x)^2} \\ -\dfrac{1}{(y-x)^2} & \dfrac{1}{(y-x)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(y-x)^2} \cdot \left[-2x + \frac{1}{(y-x)^2} \right] - \left[-\frac{1}{(y-x)^2} \right]^2$$

Segue quindi che, essendo $H(-1,0) = 2 > 0$ e $f_{xx}(-1,0) = 1 > 0$, P_1 è un punto di minimo, mentre, essendo $H(1,2) = -2 < 0$, P_2 è un punto di sella.

2) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ nella regione $x^2 + y^2 \le 8$.

Per prima cosa determiniamo i massimi e i minimi relativi interni al cerchio. Deve essere $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ ed essendo $f_x = 2x - 2$, $f_y = 2y - 2$, si ha che il sistema è soddisfatto (1,1) (interno al cerchio). Essendo $f_{xx} = 2 > 0$, $f_{yy} = 2$ e $f_{xy} = 0$ si ha $H(x,y) = 4 > 0$ e quindi abbiamo un punto di minimo $f(1,1) = -2$. Per determinare i punti di massimo e di minimo sulla circonferenza utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ha:

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$;

$L_x = 2x - 2 + 2\lambda x$, $L_y = 2y - 2 + 2\lambda y$, $L_\lambda = x^2 + y^2 - 8$. Per ci il sistema $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases}$ è soddisfatto nei punti $P_1(2,2,-1/2)$ e $P_2(-2,-2,-3/2)$.

L'hessiano orlato è dato da $D = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = -8(1+\lambda)(x^2+y^2)$.

Si ha quindi: $D(P_1) = -32 < 0$, minimo con $f(P_1) = 0$; mentre $D(P_2) = 32 > 0$, massimo con $f(P_2) = 16$. In conclusione il punto (1,1) è il minimo assoluto, mentre il punto (–2,–2) è il massimo.