Università degli Studi di Camerino
Corso di Laurea in Tecnologie per l'Innovazione
Parziale di CALCOLO II
20 marzo 2007

SOLUZIONE

1) Deve essere $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ e^{2x}-e^x \geq 0 \end{cases}$ da cui segue $\begin{cases} x<1,\ x>2 \\ e^x\left(e^x-1\right)\geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x<1,\ x>2 \\ x\geq 0 \end{cases}$

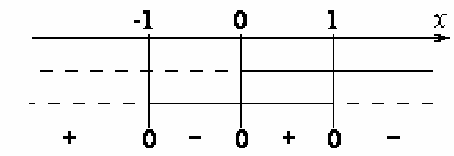
per cui $D=\left\{x\in\mathbb{R}/0\leq x<1,\ \ x>2\right\}$.

2) A) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2\left(x-2\right)-\left(x-2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x^2-1\right)}{\cancel{x-2}}=3$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3senx+4x\cos x}{tgx-3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3senx+4x\cos x}{x}}{\dfrac{tgx-3x^2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3senx}{x}+4\cos x}{\dfrac{tgx}{x}-x}=\dfrac{3+4}{1}=7$

3) La funzione $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}$ non è definita per x = 0; poiché $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}}\dfrac{1}{x}=\pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^x=\begin{cases} 0 & se\ x\to-\infty \\ +\infty & se\ x\to+\infty \end{cases}$ si ha $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\begin{cases} 0 & se\ x\to 0^- \\ +\infty & se\ x\to 0^+ \end{cases}$, quindi la retta x = 0 (ovvero l'asse y) è un asintoto verticale a destra. Inoltre la funzione ha per asintoto orizzontale la retta y = 1 in quanto $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

4) La funzione è sempre definita e la sua derivata è: $f'\left(x\right)=2xe^{-x^2}\left(1-x^2\right)$. Lo studio del segno porta al seguente grafico:



Si ha pertanto che la funzione è crescente negli intervalli $x<-1,\ \ 0<x<1$; è decrescente negli intervalli $-1<x<0,\ x>1$. Si hanno massimi nei punti (-1; 1/e) e (1; 1/e); si ha un minimo nell'origine degli assi (0; 0).

5) $D=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\pm 1\right\}$. La funzione è negativa per $x<-1,\ 0<x<1$ e positiva per $-1<x<0,\ x>1$. $f(x)$ = 0 per x = 0. Ha asintoti verticali: x = -1 e x = 1; infatti

$\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\infty$; asintoto obliquo $y = x$; infatti: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}\cdot\dfrac{1}{x}=1$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$.

La derivata prima è $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ ed è negativa per $-\sqrt{3}<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $1<x<\sqrt{3}$, è positiva per $x<-\sqrt{3}$ e $x>\sqrt{3}$ ed è nulla per $x=\pm\sqrt{3}$ e $x=0$. Il punto $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ è un massimo, il punto $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ è un minimo. L'origine degli assi (0,0) è un flesso, infatti la derivata seconda è $f''(x)=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$ che è negativa per $x<-1$ e $0<x<1$, positiva per $-1<x<0$ e $x>1$; la derivata seconda è nulla per $x = 0$.