Equazioni differenziali

1 – Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Si chiama equazione differenziale ordinaria[1] del primo ordine un'equazione nella quale compare come incognita una funzione $y = y(x)$ e la sua derivata prima. Una tale equazione è del tipo:

(1) $$F(x, y, y') = 0$$

Dove le tre variabili (x, y, y') vanno pensate indipendenti e la funzione F assegnata in un certo insieme dello spazio ordinario.
Nella (1) potrebbero non comparire esplicitamente la x o la y, ma non può mancare la y'.
Ogni funzione $y = \varphi(x)$ che risulti derivabile in un certo intervallo I dell'asse x e che soddisfi la relazione $F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x)\right] = 0$ si dice soluzione dell'equazione differenziale (1). Il grafico di $y = \varphi(x)$ si dirà curva integrale dell'equazione.
Risolvere o ***integrare*** un'equazione differenziale significa determinarne tutte le soluzioni.
Una equazione differenziale del primo ordine si dice ridotta in ***forma normale*** quando può essere scritta nella forma:

(2) $$y' = f(x, y).$$

Una equazione differenziale ordinaria del primo ordine e di forma normale, si dice lineare quando ha la forma:

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$$

con $a(x)$ e $b(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I.

Se la funzione $a(x)$ è identicamente nulla allora per determinare la funzione incognita $y(x)$ basta integrare entrambi i membri

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int b(x)\,dx + c$$

Si hanno quindi infinite soluzioni che dipendono dalla costante arbitraria c, tutte definite nell'intervallo I.

ESEMPIO 1 – Integrare l'equazione differenziale:

$$y' = 2x.$$

La soluzione è $y(x) = \int 2x\,dx + c = x^2 + c$. In figura 1 sono riportate le curve integrali per alcuni valori di c.

◊

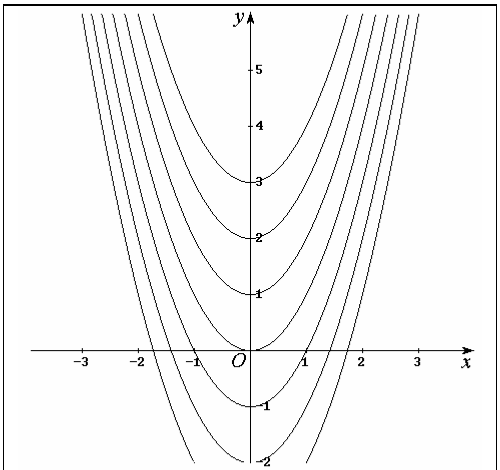

Figura 1 – Le curve integrali dell'equazione differenziale dell'Esempio 1 per $c = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Vediamo un altro caso interessante di equazione differenziale del primo ordine.

[1] Il termine ordinario si riferisce al fatto che la funzione incognita y dipende solo dalla variabile x.

ESEMPIO 2 – Risolvere la seguente equazione differenziale del primo ordine e in forma normale:

(3) $$y' = y\,.$$

È immediato verificare che la funzione:

(4) $$y = c \cdot e^{x}$$

è una soluzione. Viceversa, se $\varphi(x)$ è una soluzione, allora risulta: $\varphi'(x) - \varphi(x) = 0$ e moltiplicando ambo i membri per $y = e^{-x}$, si ottiene: $e^{-x}\varphi'(x) - e^{-x}\varphi(x) = 0$ e quindi $\frac{d}{dx}\left[e^{-x}\varphi(x)\right] = 0$ da cui segue: $e^{-x}\varphi(x) = k$ con k costante opportuna. Si conclude quindi che: $\varphi(x) = k \cdot e^{x}$ e che tutte le soluzioni della (3) hanno la forma (4).

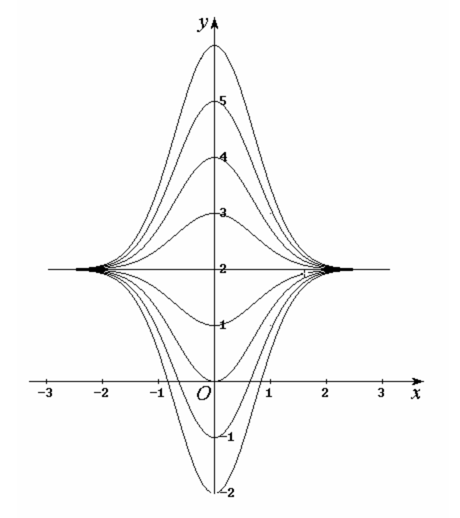

Figura 2 – Le curve integrali dell'equazione differenziale dell'Esempio 2 per c = 0, ±1, ±2, ±3, ±4.

◊

Dall'esempio 2 si ottiene un procedimento per la risoluzione di una equazione differenziale lineare del primo ordine.
Procediamo come segue: moltiplichiamo l'equazione per il cosiddetto ***fattore integrante*** $e^{A(x)}$, dove $A(x) = \int a(x)\,dx$. L'equazione può essere quindi scritta nella forma:

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)\,y(x) = e^{A(x)}b(x)\,.$$

Il primo membro è la derivata della funzione $e^{A(x)}y(x)$, infatti:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{A(x)}y(x)\right] = +e^{A(x)}y'(x) + \left[\frac{d}{dx}A(x)\right]e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}b(x)$$

Integrando ambo i membri otteniamo:

$$e^{A(x)}y(x) = \int e^{A(x)}b(x)\,dx + c$$

e quindi la soluzione:

(5) $$y(x) = e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)}b(x)\,dx + c\right]$$

ESEMPIO 3 – Integrare l'equazione differenziale: $y'(x) + 2xy(x) = 4x$.

Si ha: $A(x) = \int 2x\,dx = x^2$, quindi:

$$y(x) = e^{-x^2}\left[4\int e^{x^2}x\,dx + c\right] = e^{-x^2}\left[2e^{x^2} + c\right] = 2 + ce^{-x^2}\,.$$

◊

Per determinare una ed una sola soluzione dell'equazione è necessario determinare la costante arbitraria c e per ciò è sufficiente dare la cosiddetta ***condizione iniziale*** $y(x_0) = y_0$ con $x_0 \in I$, ciò equivale ad imporre il passaggio della curva integrale per il punto (x_0, y_0). Il problema:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è detto ***problema di Cauchy*** ed ha un'unica soluzione definita nell'intervallo *I*.

ESEMPIO 4 – Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 4x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quello determinato nell'esempio 3, ponendo la condizione $y(0) = -1$. Si ha: $-1 = y(0) = 2 + ce^0 = 2 + c$ da cui segue: $c = -3$, quindi la soluzione è: $y(x) = 2 - 3e^{-x^2}$.

◊

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 1 – Sia $f(x, y)$ una funzione in due variabili continua nella striscia *S* del piano *xy*

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, -\infty < y < +\infty, a < b\right\}$$

e derivabile rispetto alla *y*, e tale derivata sia limitata in *S*. In tali ipotesi, se (x_0, y_0) è un punto qualsiasi di *S*, l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ ammette una e una sola soluzione: $y = \varphi(x)$, definita nell'intervallo $[a,b]$ e soddisfa la condizione: $y_0 = \varphi(x_0)$.

Tale teorema, insieme a sue generalizzazioni che non citeremo, consente di dire che per ogni punto della suddetta striscia passa una e una sola curva integrale.

DEFINIZIONE – Si chiama ***integrale generale*** dell'equazione differenziale (2) una funzione della variabile *x* definita in un intervallo $[a,b]$ e della costante arbitraria *c*: $y = \Phi(x,c)$, che gode delle seguenti proprietà:

1. Per ogni valore della costante arbitraria *c* la funzione soddisfa all'equazione (2) in tutto $[a,b]$
2. Comunque si prenda un punto $P_0(x_0, y_0)$ di *S*, si può determinare un valore della costante *c* (la indicheremo con c_0) in modo che la funzione $y = \Phi(x,c_0)$ verifichi la condizione:
$$\Phi(x_0,c_0) = y_0.$$

Ogni integrale dell'equazione differenziale (2) che si ottiene dall'integrale generale attribuendo alla costante arbitraria un valore particolare, si chiama ***integrale particolare***.

2 – Integrazione di alcuni tipi di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

L'equazione differenziale (2) scritta nella forma:

$$dy - f(x,y)\,dx = 0$$

È un caso particolare dell'espressione:

(6) $$L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = 0$$

che è una forma differenziale lineare.

L'equazione (6) può essere vista sia come: $\frac{dy}{dx} = -\frac{L(x,y)}{M(x,y)}$, nel caso in cui $M(x,y) \neq 0$, e quindi una equazione differenziale della funzione $y(x)$; oppure, se risulta $L(x,y) \neq 0$, può essere vista come un'equazione differenziale $\frac{dx}{dy} = -\frac{M(x,y)}{L(x,y)}$ della funzione $x(y)$.

<u>2.1 – Equazioni differenziali esatte</u>

Se le funzioni $L(x,y)$ e $M(x,y)$ sono continue in un insieme connesso *A* e se ad esempio $M(x,y) \neq 0$ in *A*, allora l'equazione differenziale (6) si dice esatta se la forma differenziale (6) è integrabile, ovvero se esiste una funzione $F(x,y)$, tale che:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = L(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = M(x,y).$$

Ricordiamo che se l'insieme A è semplicemente connesso, allora $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$ è condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità della forma differenziale e quindi dell'equazione differenziale. Si ha quindi la soluzione $F(x,y) = c$. Nel capitolo delle forme differenziali abbiamo visto come determinare la $F(x,y)$.

ESEMPIO 5 – Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$.

L'equazione può essere scritta nella forma $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$ e si dimostra che è una forma differenziale esatta; infatti: $\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) = -1$ e $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1$. Si ha:

$$F(x,y) = \int L(x,y)\,dx + \phi(y) = \int (x^2 - y)\,dx + \phi(y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + \phi(y)$$

e quindi $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{3}x^3 - xy + \phi(y)\right] = -x + \phi'(y) = y^2 - x$ da cui segue: $\phi'(y) = y^2$ ovvero $\phi(y) = \frac{1}{3}y^3 + c$. Si ha quindi $F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy + c$.

◊

<u>2.2 – Equazioni differenziali a variabili separate</u>

L'equazione differenziale (6) si dice a variabili separate se *L* è funzione solo di *x* e *M* solo di *y*, ossia l'equazione è del tipo:

(7) $$L(x)\,dx + M(y)\,dy = 0\,.$$

La soluzione dell'equazione si ottiene integrando i due membri:

$$\int L(x)\,dx + \int M(y)\,dy = c$$

ESEMPIO 6 – Risolvere l'equazione a variabili separate:

$$xdx - \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

Si ha:

$$\int xdx - \int \frac{1}{1+y^2}dy = c$$

e quindi:

$$\frac{1}{2}x^2 - arctgy = c$$

e quindi

$$y = tg\left(\frac{1}{2}x^2 - c\right).$$

◊

<u>2.3 – Equazioni differenziali a variabili separabili</u>

Se $L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy = 0$ si può scrivere nella forma

(8) $$f_1(x)\,g_2(y)\,dx + f_2(x)\,g_1(y)\,dy = 0,$$

dove $f_2(x) \neq 0$ e $g_2(y) \neq 0$, ci si riconduce ad una equazione del tipo (7):

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0;$$

l'equazione differenziale (8) viene detta a variabili separabili e la primitiva si ottiene per integrazione dei due termini.

ESEMPIO 7 – Risolvere l'equazione differenziale $2xydx + (1+x^2)dy = 0$.

Una soluzione è $y = 0$. Supponendo quindi $y \neq 0$ si ha:

$$\frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

da cui segue: $\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = 0$. Integrando e ponendo per comodità la costante con $ln|c|$, si ha:

$$ln(1+x^2) + ln|y| = ln|c|.$$

Ne deriva: $(1+x^2)|y| = |c|$ e quindi:

$$y = \frac{c}{1+x^2}.$$

◊

ESEMPIO 8 – Risolvere l'equazione differenziale $y' = -2xy^2$ e determinare l'integrale che soddisfa la condizione $y(1) = -1$.

L'equazione ha come soluzione y = 0. Supposto quindi $y \neq 0$ si ha: $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$ da cui segue: $\frac{dy}{y^2} = -2xdx$ ed integrando si ha: $-\frac{1}{y} = -x^2 + c$. L'integrale generale è quindi $y = \frac{1}{x^2 - c}$ e la soluzione $y = 0$ si ottiene per $c \to +\infty$. Imponendo la condizione $y(1) = -1$ si ha: $c = 2$, ottenendo la soluzione

$$y = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

◊

2.4 – Equazione differenziali del tipo $y' = f(ax + by)$

Sia data l'equazione differenziale

(9)
$$y' = f(ax + by)$$

con *f* funzione continua e *a*, *b*, costanti entrambi diverse da zero. Introducendo la nuova incognita $z = ax + by$ e si ricava:

$$y = \frac{z - ax}{b}, \qquad y' = \frac{z' - a}{b}$$

e perciò l'equazione (9) diventa:

$$z' = a + bf(z)$$

che è a variabili separabili.

Per ogni soluzione $z(x)$, si ha una soluzione $y = \frac{z(x) - ax}{b}$.

ESEMPIO 9 – Risolvere l'equazione: $y' = (x + y)^2$

Posto $z = x + y$ e si ha: $y = z - x$ da cui segue: $y' = z' - 1$ e si ha l'equazione per *z*: $z' = 1 + z^2$. Separando le variabili si ha: $\frac{dz}{1 + z^2} = dx$ da cui, integrando si ha: $arctgz = x + c$, ovvero $z = tg(x + c)$.

L'equazione proposta ha pertanto come integrale generale: $y = tg(x + c) - x$.

◊

2.5 – Equazioni differenziali omogenee

Ricordiamo che una funzione *f*(*x*,*y*) è detta omogenea di grado *n* se $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Una equazione differenziale del primo ordine si dice a coefficienti omogenei quando è del tipo:

(10)
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

cioè il secondo membro è una funzione continua, omogenea di grado zero.

Ponendo $z = \frac{y}{x}$ si ricava: $y = zx$ da cui: $y' = z + xz'$ e perciò si ha: $z + xz' = f(z)$ ossia:

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

che è a variabili separabili:

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

ESEMPIO 10 – Risolvere l'equazione: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$.

Posto $z = \frac{y}{x}$, con le indicazioni di cui sopra, si ha: $\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}$ e integrando otteniamo: $arcsen z = ln|x| + c$ e quindi $z = sen(ln|x| + c)$. L'integrale generale è quindi: $y = x \cdot sen(ln|x| + c)$.

◊

<u>2.6 – Equazioni differenziali del tipo</u> $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$

Consideriamo l'equazione differenziale del tipo:

(11) $$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

dove f è una funzione continua e *a*, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'* sono costanti reali tali che sia $ab' - a'b \neq 0$ e *c*, *c'* non entrambe nulle.
Il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

nelle condizioni poste per le costanti, ammette una e una sola soluzione (α,β) diversa dall'origine.
Si effettua quindi il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$$

Si ha: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v + \beta)}{d(u + \alpha)} = \frac{dv}{du}$, $ax + by + c = au + bv$, $a'x + b'y + c' = a'u + b'v$ e l'equazione (11) diventa:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a'u + b'v}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{a' + b'\frac{v}{u}}\right)$$

che è del tipo (10). Ad ogni integrale $v = v(u)$, corrisponde l'integrale $y = \beta + v(x - \alpha)$.

ESEMPIO 11 – Risolvere l'equazione

$$(x + y - 1)^2 dx - 4x^2 dy = 0$$

Supposto $x \neq 0$, l'equazione può essere scritta nella forma

$$y' = \left(\frac{x+y-1}{2x} \right)^2$$

che risulta del tipo (11). Il sistema $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x=0 \end{cases}$ ha soluzione $(0,1)$. Ponendo quindi $\begin{cases} x=u \\ y=v+1 \end{cases}$ l'equazione diventa:

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{u+v}{2u} \right)^2 = \left(\frac{1+\frac{v}{u}}{2} \right)^2$$

Posto ora $z = \frac{v}{u}$, si ha: $v = zu$, $\frac{dv}{du} = \frac{dz}{du}u + z$ e quindi: $\frac{dz}{du}u + z = \left(\frac{1+z}{2} \right)^2$ da cui segue:

$$\frac{4}{(z-1)^2} dz = \frac{1}{u} du$$

Integrando e poi passando alle variabili *x*, *y* si trova:

$$y = x + 1 - \frac{4x}{ln|cx|}.$$

◊

3 – Generalità sulle equazioni differenziali lineari di ordine *n*

Il capitolo delle equazione differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo e vastissimo, ci limiteremo a dare alcune generalità sulle equazioni differenziali lineari e alla risoluzione di equazioni differenziali lineari del secondo a coefficienti costanti omogenee e ad alcuni casi semplici di equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee.

Una equazione differenziale lineare di ordine *n* si presenta nella forma:

(12) $$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + ... + a_{(n-1)}(x)\,y' + a_n(x)\,y = g(x)$$

dove $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, …, y' sono le derivate della funzione incognita $y(x)$; i coefficienti $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$ e il termine noto $g(x)$ sono funzioni date in uno stesso intervallo *I* in cui si suppone che siano anche continue.
Se la funzione noto $g(x)$ è identicamente nulla in *I* la (12) viene detta ***equazione differenziale lineare omogenea***; in caso contrario si parla di ***equazione differenziale lineare non omogenea***.

Supponiamo che i coefficienti e il termine noto della (12) siano continui nell'intervallo $[a,b]$ e siano x_0 un punto di $[a,b]$ e β, β_1, β_2, …, β_{n-1} numeri reali qualunque; si dimostra che l'equazione (12) ammette una e una sola soluzione $\varphi(x)$ che soddisfa alle condizioni iniziali: $\varphi(x_0) = \beta$, $\varphi'(x_0) = \beta_1$, $\varphi''(x_0) = \beta_2$, . . ., $\varphi^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}$.

Consideriamo prima le equazioni omogenee:

(13) $$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{(n-1)}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0$$

Vale il seguente teorema:

TEOREMA – Se $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_p(x)$ sono p integrali particolari dell'equazione (13) (p è un numero naturale qualsiasi), allora dette c_1, c_2, . . ., c_p delle costanti arbitrarie, allora anche:

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_p\varphi_p(x)$$

è un'integrale della stessa equazione.

Siano ora $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_n(x)$ n integrali particolari dell'equazione (13) (tanti quanto l'ordine dell'equazione), si chiama ***wronskiano*** di tali integrali il determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \ldots & \varphi_n''(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vale il seguente teorema:
TEOREMA DI LIOUVILLE – Comunque si fissino gli n integrali particolari $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_n(x)$ dell'equazione (13) ed un punto x_0 dell'intervallo $[a,b]$ vale la seguente relazione:

$$W(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx} .$$

Da tale teorema segue che il wronskiano o è identicamente nullo o non si annulla mai. Se il Wronskiano non si annulla mai allora le funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_n(x)$ costituiscono un sistema fondamentale di integrali per l'equazione (13) e si dimostra che tutti e soli gli integrali dell'equazione sono espressi come combinazione lineare di tale sistema; ovvero sono compresi nella formula:

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

dove c_1, c_2, . . ., c_n sono delle costanti arbitrarie. È questa la forma dell'integrale generale dell'equazione (13).

Possiamo concludere dicendo che per determinare l'integrale generale di una equazione differenziale lineare omogenea dobbiamo individuare un sistema fondamentale di soluzioni.

4 – Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{(n-1)} y' + a_n y = g(x)$$

dove a_1, a_2, …, $a_{(n-1)}$, a_n sono delle costanti reali[2]. La variabile x è sempre una variabile reale. Una equazione del secondo ordine è data da

(14) $$y''+a_1 y'+a_2 y = g(x).$$

Se g è una funzione continua nell'intervallo I, allora, comunque si prendano tre numeri x_0, y_0, y_0' esiste una e una sola funzione $y = y(x)$, soluzione della (14) , definita in un insieme I, che soddisfa alle condizioni iniziali

(15) $$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

In particolare se la (14) è omogenea, cioè $g(x)=0$, e quindi continua per ogni $x\in\mathbb{R}$, allora la soluzione della (14) sotto la condizione (15) è definita in tutto $\mathbb{R}$.

4.1 – Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee

Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenea si presenta nella forma:

(16) $$y''+a_1 y'+a_2 y=0$$

con a_1 e a_2 costanti. Cerchiamo quindi un sistema fondamentale di integrali della (16).

Poniamo quindi $y=e^{\lambda x}$, con λ costante. Derivando otteniamo: $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ e sostituendo nella (16) si ha:

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_2 e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\left(\lambda^2+a_1\lambda+a_2\right)=0$$

La funzione $y=e^{\lambda x}$ è quindi un integrale della (16) se e solo se λ è una radice dell'equazione algebrica:

(17) $$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0.$$

La (17) viene chiamata ***equazione caratteristica*** dell'equazione (16), è di secondo grado e quindi, nel campo complesso, ammette sempre due radici[3] che sono:

$$\lambda_{12}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$$

Consideriamo i due casi:

Caso 1 – $a_1^2-4a_2\neq 0$; l'equazione (17) ammette due radici distinte λ_1 e λ_2; il sistema di integrali fondamentali della (16) è dato dalle funzioni: $y=e^{\lambda_1 x}$ e $y=e^{\lambda_2 x}$. Per dimostrare che ciò è vero basta far vedere che il wronskiano è diverso da zero; infatti

[2] In effetti il fatto che tali costanti siano reali è irrilevante in quanto quello che diremo vale anche per costanti complesse.

[3] È questo il teorema fondamentale dell'algebra che in sostanza afferma che nel campo complesso un'equazione algebrica di grado n ammette sempre n radici.

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\neq 0$$

essendo appunto $\lambda_1 \neq \lambda_2$. L'integrale generale dell'equazione è quindi:

(18) $$y(x)=c_1 e^{\lambda_1 x}+c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Si ricorda che le costanti arbitrarie sono determinate assegnando le condizioni iniziali
Nel caso in cui $a_1^2-4a_2>0$, λ_1 e λ_2 sono numeri reali, mentre se $a_1^2-4a_2<0$, λ_1 e λ_2 sono numeri complessi coniugati $(\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta)$; in quest'ultimo caso, utilizzando la formula di Eulero per la rappresentazione dei numeri complessi, l'integrale generale può essere scritto in una delle seguenti forme:

(19) $$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2 sen\beta x)=Ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi)=Be^{\alpha x}sen(\beta x+\psi)$$

con c_1, c_2, A, φ, B, ψ costanti arbitrarie; si lascia allo studente la dimostrazione dell'equivalenza tra le (18) e le (19).

ESEMPIO 12 – Risolvere l'equazione differenziale $y''+y'-6y=0$.
L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

che ammette le soluzioni reali e distinte: $\lambda_1=-3$ e $\lambda_2=2$. Si ha quindi la soluzione:

$$y(x)=c_1 e^{-3x}+c_2 e^{2x}$$

◊

ESEMPIO 13 – Risolvere l'equazione differenziale $y''-2y'+10y=0$.
L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2-2\lambda+10=0$$

che ammette le soluzioni reali e distinte: $\lambda_1=1-3i$ e $\lambda_2=1+3i$. La soluzione può essere scritta quindi in una delle seguenti forme:

$$y(x)=e^{x}(c_1\cos 3x+c_2 sen3x)$$
$$y(x)=Ae^{x}\cos(3x+\varphi)$$
$$y(x)=Be^{x}sen(3x+\psi)$$

◊

Caso 2 – $a_1^2-4a_2=0$; l'equazione (17) ammette due radici coincidenti $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$; il sistema di integrali fondamentali della (16) è dato dalle funzioni: $y=e^x$ e $y=xe^x$. Per dimostrare che ciò è vero basta far vedere che il wronskiano è diverso da zero; infatti

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}(1+\lambda x) \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0 .$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi:

(20) $$y(x)=c_1 e^{\lambda x}+c_2 x e^{\lambda x}=e^{\lambda x}(c_1+c_2 x).$$

ESEMPIO 14 – Risolvere l'equazione differenziale $y''-6y'+9y=0$.
L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

che ammette le soluzioni reali e coincidenti: $\lambda_1=\lambda_2=3$. Si ha quindi la soluzione:

$$y(x)=c_1 e^{3x}+c_2 x e^{3x}=e^{3x}(c_1+c_2 x)$$

◊

4.2 – <u>Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee</u>
Per risolvere una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea (14), è necessario risolvere prima l'equazione omogenea associata (16). Vale il seguente teorema:

TEOREMA – Indicati con $y(x)$ l'integrale generale dell'equazione (14), $\overline{y}(x)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea associata (16) e con $y^*(x)$ un integrale particolare della (14), si ha:

$$y(x)=\overline{y}(x)+y^*(x)$$

Vediamo un metodo generale noto come ***metodo di Lagrange*** o della ***variazione delle costanti arbitrarie***.
L'integrale generale della (16) è della forma: $\overline{y}(x)=c_1y_1+c_2y_2$; poniamo $y^*(x)=c_1y_1+c_2y_2$ dove però c_1 e c_2 sono funzioni di *x*: $c_1(x)$ e $c_2(x)$. Affinché $y^*(x)$ sia un integrale particolare della (14), la deve soddisfare e, lo diamo senza dimostrazione, ciò è vero se le derivate $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ sono soluzioni del sistema:

(21) $$\begin{cases} c_1'\,y_1+c_2'\,y_2=0 \\ c_1'\,y_1'+c_2'\,y_2'=g(x) \end{cases}$$

Tale sistema si risolve con la regola di Kramer ed ammette soluzioni in quanto il determinante altro non è che il wronskiano dell'equazione differenziale.

ESEMPIO 15 – Risolvere l'equazione differenziale $y''+y=\dfrac{1}{senx}$.
L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2+1=0$$

che ammette le soluzioni complesse e coniugate: $\pm i$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x .$$

Un integrale particolare dell'equazione è quindi $y^*(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\operatorname{sen} x$ con $c_1(x)$ e $c_2(x)$ che si ricavano dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} c_1{}'\cos x + c_2{}'\operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1{}'\operatorname{sen} x + c_2{}'\cos x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

Con la regola di Kramer otteniamo:

$$c_1{}' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -1 \qquad\qquad c_2{}' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Integrando, a meno di costanti additive, otteniamo:

$$c_1(x) = -x \qquad\qquad c_2(x) = \ln|\operatorname{sen} x|$$

Pertanto l'integrale particolare dell'equazione è:

$$y^*(x) = -x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln|\operatorname{sen} x|$$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln|\operatorname{sen} x|$$

◊

Il metodo di Lagrange comporta il calcolo di un integrale e, come ben sappiamo, la cosa non è sempre agevole. In molti casi, per la determinazione di un integrale particolare della (14), è possibile utilizzare il cosiddetto ***metodo dei coefficienti indeterminati***. Vediamo alcuni casi particolari.

Caso 1 – $g(x) = Q_m(x)$, ovvero un polinomio di grado *m*.

L'integrale particolare è: $y^*(x) = P_n(x)$, precisamente:

- se $a_2 \neq 0$, allora $n = m$;
- se $a_2 = 0$ e $a_1 \neq 0$, allora $n = m + 1$;
- se $a_2 = 0$ e $a_1 = 0$, allora $n = m + 2$; in questo caso l'equazione diventa $y'' = g(x)$ e la soluzione si ottiene con una doppia integrazione.

ESEMPIO 16 – Risolvere l'equazione differenziale $y'' + 4y' = x^2$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

che ammette le soluzioni reali $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 0$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 .$$

Per l'integrale particolare osserviamo che se $a_2 = 0$ e $a_1 = 4 \neq 0$, allora $n = m + 1$ e sarà quindi

$$y^*(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

con a, b, c, d costanti da determinare. Derivando si ha:

$$y^{*\prime}(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad \text{e} \qquad y^{*\prime\prime}(x) = 6ax + 2b$$

E quindi

$$6ax + 2b + 4\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2$$

$$12ax^2 + 2\left(3a + 4b\right)x + 2b + 4c = x^2$$

Si ha quindi:

$$\begin{cases} 12a = 1 \\ 3a + 4b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui segue} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{12} \\ b = -\dfrac{1}{16} \\ c = \dfrac{1}{32} \end{cases}$$

L'integrale particolare è:

$$y^*(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x$$

non dipendendo da d, possiamo scegliere $d = 0$. L'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x$$

◊

Caso 2 – $g(x) = Ae^{\alpha x}$, con A e α costanti.

- Se α non coincide con una delle radici dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata, si pone: $y^*(x) = Be^{\alpha x}$ con B costante da determinare;
- Se α coincide con una delle radici distinte dell'equazione caratteristica, si pone: $y^*(x) = Bxe^{\alpha x}$;

- Se α coincide con una le radici coincidenti dell'equazione caratteristica, si pone: $y^*(x) = Bx^2 e^{\alpha x}$.

ESEMPIO 17 – Risolvere l'equazione differenziale $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

che ammette le soluzioni reali $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x .$$

Siamo nel caso in cui α = - 2 è una delle due soluzioni reali dell'equazione omogenea. Poniamo quindi:

$$y^*(x) = Bxe^{-2x} .$$

Derivando si ha:

$$y^{*\prime}(x) = Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x} = Be^{-2x}(1-2x) \quad \text{e} \quad y^{*\prime\prime}(x) = -2Be^{-2x}(1-2x) - 2Be^{-2x} = 4Be^{-2x}(x-1)$$

E quindi

$$4Be^{-2x}(x-1) + Be^{-2x}(1-2x) - 2Bxe^{-2x} = 3e^{-2x}$$

da cui: $4B(x-1) + B(1-2x) - 2Bx = 3$; si ricava quindi *B* = -1. La soluzione particolare è quindi: $y^*(x) = -xe^{-2x}$, mentre l'integrale generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - xe^{-2x} = (c_1 - x)e^{-2x} + c_2 e^x$$

◊

Caso 3 – $g(x) = C\cos\beta x + D\,sen\beta x$, con *C*, *D* e β costanti.

- Se iβ non è radice dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata, si pone: $y^*(x) = A\cos\beta x + B\,sen\beta x$ con *A* e *B* costanti da determinare;
- Se iβ è radice dell'equazione caratteristica, si pone: $y^*(x) = x(A\cos\beta x + B\,sen\beta x)$ con *A* e *B* costanti da determinare.

ESEMPIO 18 – Risolvere l'equazione differenziale $y'' - y' = \cos x$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

che ammette le soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\bar{y}(x) = c_1 + c_2 e^x .$$

Non essendo iβ = i radice dell'equazione omogenea poniamo: $y^*(x) = A\cos x + B\operatorname{sen}x$. Derivando si ha:

$$y^*{}'(x) = -A\operatorname{sen}x + B\cos x \quad \text{e} \quad y^*{}''(x) = -A\cos x - B\operatorname{sen}x$$

e sostituendo otteniamo:

$$-A\cos x - B\operatorname{sen}x - A\operatorname{sen}x + B\cos x = \cos x$$

cioè:

$$(-A+B)\cos x - (A+B)\operatorname{sen}x = \cos x .$$

Affinché questa uguaglianza sia verificata deve essere:

$$\begin{cases} B - A = 1 \\ -A - B = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'integrale particolare è quindi:

$$y^*(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x ,$$

mentre l'integrale generale è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x$$

◊

Caso 4 – $g(x) = e^{\alpha x}\left[C(x)\cos\beta x + D(x)\operatorname{sen}\beta x\right]$, con α e β costanti, $C(x)$ e $D(x)$ polinomi in x.

È facile rendersi conto come ci si possa ricondurre ai tre casi precedenti a seconda del valore delle costanti e dei polinomi. In generale:

- Se α + iβ non è radice dell'equazione caratteristica, allora si cercherà la soluzioni particoalre nella forma pone: $y^*(x) = e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\operatorname{sen}\beta x\right]$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi, da determinarsi, entrambi di grado uguale al maggiore tra i gradi di $C(x)$ e $D(x)$;

- Se α + iβ è una delle radici distinte dell'equazione caratteristica, si pone: $y^*(x) = xe^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\operatorname{sen}\beta x\right]$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi, da determinarsi, entrambi di grado uguale al maggiore tra i gradi di $C(x)$ e $D(x)$;

- Se l'equazione caratteristica ha le radici coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$ e se risulta β = 0 allora si prenderà: $y^*(x) = x^2 A(x) e^{\alpha x}$ con $A(x)$ polinomio, da determinarsi, di grado uguale al maggiore tra i gradi di $C(x)$ e $D(x)$.

ESEMPIO 19 – Risolvere l'equazione differenziale $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{2x}$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

che ammette le soluzioni reali e distinte $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=3$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x)=c_1e^x+c_2xe^{3x}.$$

Si ha inoltre che α = 2, β = 0, $C(x)=2x+1$ e poiché α + iβ = 2 non è radice dell'equazione caratteristica, scriviamo l'integrale particolare nella forma:

$$y^*(x)=(ax+b)e^{2x}$$

con *a*, *b*, costanti da determinare. Derivando si ha:

$$y^{*\prime}(x)=ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x}=(a+2ax+2b)e^{2x}$$

$$y^{*\prime\prime}(x)=2ae^{2x}+2(a+2ax+2b)e^{2x}=4(a+ax+b)e^{2x}$$

e sostituendo e semplificando otteniamo:

$$-ax-b=2x+1$$

da cui: $a=-2$ e $b=-1$. L'integrale particolare è:

$$y^*(x)=(-2x-1)e^{2x},$$

mentre l'integrale generale è:

$$y(x)=\overline{y}(x)=c_1e^x+c_2xe^{3x}-(2x+1)e^{2x}$$

◊

ESEMPIO 20 – Risolvere l'equazione differenziale $y''-4y'=2xe^{4x}$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2-4\lambda=0$$

che ammette le soluzioni reali e distinte $\lambda_1=0$ e $\lambda_2=4$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x)=c_1+c_2e^{4x}.$$

Si ha inoltre che α = 4, β = 0, $C(x)=2x$ e poiché α + iβ = 4 coincide con una radice dell'equazione caratteristica, scriviamo l'integrale particolare nella forma:

$$y^*(x) = x(ax+b)e^{4x} = (ax^2+bx)e^{4x}$$

con a, b, costanti da determinare. Derivando si ha:

$$y^{*\prime}(x) = (2ax+b)e^{4x} + 4(ax^2+bx)e^{4x} = (2ax+b+4ax^2+4bx)e^{4x}$$

$$y^{*\prime\prime}(x) = (2a+8ax+4b)e^{4x} + 4(2ax+b+4ax^2+4bx)e^{4x} = (2a+16ax+8b+16ax^2+16bx)e^{4x}$$

e sostituendo e semplificando otteniamo:

$$8ax+2a+4b = 2x$$

cioè:

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 4b+2a = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

L'integrale particolare è:

$$y^*(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\right)e^{4x},$$

e quindi l'integrale generale è:

$$y(x) = c_1 + c_2e^{4x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\right)e^{4x} = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + c_2\right)e^{4x} + c_1$$

◊

ESEMPIO 21 – Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 9y = (12x^2+1)e^{3x}$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

che ammette le soluzioni reali e coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}.$$

Poiché $\alpha + i\beta = 3$ è radice doppia dell'equazione caratteristica, scriviamo l'integrale particolare nella forma:

$$y^*(x) = x^2(ax^2+bx+c)e^{3x}$$

con a, b, c, costanti da determinare. Derivando si ha:

$$y^{*\prime}(x) = (4ax^3+3bx^2+2cx)e^{3x} + 3(ax^4+bx^3+cx^2)e^{3x} = (4ax^3+3bx^2+2cx+3ax^4+3bx^3+3cx^2)e^{3x}$$

$$y^{*\prime\prime}(x)=\left(12ax^2+6bx+2c+12ax^3+9bx^2+6cx\right)e^{3x}+3\left(4ax^3+3bx^2+2cx+3ax^4+3bx^3+3cx^2\right)e^{3x}=$$
$$=\left(12ax^2+6bx+2c+24ax^3+18bx^2+12cx+9ax^4+9bx^3+9cx^2\right)e^{3x}$$

e sostituendo otteniamo che deve essere:

$$12ax^2+6bx+2c=12x^2+1$$

cioè:

$$\begin{cases}12a=12\\6b=0\\2c=1\end{cases}\qquad \text{da cui}\qquad \begin{cases}a=1\\b=0\\c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

L'integrale particolare è:

$$y^*(x)=\left(x^4+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x},$$

mentre l'integrale generale è:

$$y(x)=\left(x^4+\frac{1}{2}x^2+c_2x+c_1\right)e^{3x}$$

◊

ESEMPIO 22 – Risolvere l'equazione differenziale $y''+y'=(3-4x)\cos 2x-(2x+8)\,sen2x$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2+\lambda=0$$

che ammette le soluzioni reali e distinte $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=0$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\bar{y}(x)=c_1e^{-x}+c_2.$$

Si ha inoltre che $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $C(x)=3-4x$ e $D(x)=-2x-8$; poiché $\alpha + i\beta = 2i$ non è una radice dell'equazione caratteristica, scriviamo l'integrale particolare nella forma:

$$y^*(x)=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\,sen2x$$

con *a*, *b*, *c*, *d*, costanti da determinare. Derivando si ha:

$$y^{*\prime}(x)=a\cos 2x-2(ax+b)\,sen2x+c\,sen2x+2(cx+d)\cos 2x=$$
$$=(a+2cx+2d)\cos 2x+(c-2ax-2b)\,sen2x$$
$$y^{*\prime\prime}(x)=2c\cos 2x-2(a+2cx+2d)\,sen2x+-2a\,sen2x+2(c-2ax-2b)\cos 2x=$$
$$=4(c-ax-b)\cos 2x-4(a+cx+d)\,sen2x$$

e sostituendo e semplificando si ha:

$$\left[(2c-4a)x+(4c-4b+a+2d)\right]\cos 2x-\left[(4c+2a)x+(4a+4d-c+2b)\right]sen2x=$$
$$=(3-4x)\cos 2x-(2x+8)sen2x$$

cioè:

$$\begin{cases} 2c-4a=-4 \\ 4c-4b+a+2d=3 \\ 4c+2a=2 \\ 4a+4d-c+2b=8 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$$

L'integrale particolare è:

$$y^*(x)=x\cos 2x+sen2x,$$

mentre l'integrale generale è:

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2+x\cos 2x+sen2x$$

◊

ESEMPIO 23 – Risolvere l'equazione differenziale $y''+2y'+2y=2e^{-x}senx$.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è:

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

che ammette le soluzioni complesse e coniugate $-1\pm i$. Si ha quindi la soluzione dell'omogenea:

$$\overline{y}(x)=e^{-x}(c_1\cos x+c_2senx).$$

Si ha inoltre che α = -1, β = 1, $C(x)=0$ e $D(x)=2$; poiché α + iβ = -1 + i è una radice dell'equazione caratteristica, scriviamo l'integrale particolare nella forma:

$$y^*(x)=xe^{-x}(A\cos x+Bsenx)$$

con *A*, *B*, costanti da determinare. Derivando si ha:

$$y^*{}'(x)=e^{-x}\left\{\left[(B-A)x+A\right]\cos x+\left[B-(A+B)x\right]senx\right\}$$
$$y^*{}''(x)=e^{-x}\left\{\left[2B-2A-2Bx\right]\cos x+\left[2Ax-2A-2B\right]senx\right\}$$

sostituendo e semplificando otteniamo:

$$2Be^{-x}\cos x-2Ae^{-x}senx=2e^{-x}senx$$

cioè: $A=-1$ e $B=0$; pertanto l'integrale particolare è:

$$y^*(x) = xe^{-x} \cos x\,,$$

mentre l'integrale generale è:

$$y(x) = e^{-x}\left[(c_1 - x)\cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right]$$

◊