# Numeri complessi

Il sistema numerico che viene utilizzato è la sintesi di un processo storico che, partendo dai numeri naturali, ha portato all'introduzione di una serie di sistemi che permettono di risolvere i problemi che la vita quotidiana ci propongono.
È abbastanza evidente che non tutti i problemi possono essere risolti nell'insieme dei numeri naturali; per esempio la differenza tra due numeri se il primo è minore del secondo oppure la divisione tra due numeri. Sono due semplici problemi, ma hanno portato alla necessità di estendere il concetto di numero: il primo ha portato all'introduzione dei numeri interi, il secondo ai numeri razionali. Ma neanche questi sono stati sufficienti: problemi tipo la determinazione del rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato o il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, non trovano soluzione nel campo dei numeri razionali. Si arriva quindi alla definizione dei numeri reali.

Non esiste però nessun numero reale $x$ che soddisfi all'equazione $x^2+1=0$, si introducono quindi i numeri complessi.
Un numero complesso $z$ si scrive nella forma $z = a + ib$, con $a$ e $b$ numeri reali, $i$ è l'unità immaginaria definita come: $i^2 = -1$. $a$ è la parte reale di $z$, si indica con $\mathrm{Re}(z)$, e $b$ è la parte immaginaria di $z$, si indica con $\mathrm{Im}(z)$. Ci si rende conto facilmente che se $b = 0$ il numero complesso è in effetti un numero reale, mentre se è $a = 0$, allora il numero si dice immaginario.

Il complesso coniugato del numero complesso $z=a+ib$ è $\bar{z}=a-ib$

Due numeri complessi $a + ib$ e $c + id$ sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Operazioni con i numeri complessi

Addizione:

$$(a+ib)+(c+id)=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d)$$

Sottrazione:

$$(a+ib)-(c+id)=a+ib-c-id=(a-c)+i(b-d)$$

Moltiplicazione:

$$(a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

Divisione:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)}{(c+id)}\frac{(c-id)}{(c-id)}=\frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2-i^2d^2}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Si chiama valore assoluto o modulo del numero complesso $z=a+ib$, e si indica con $|z|$ o con $|a+ib|$, la quantità: $\sqrt{a^2+b^2}$.

ESEMPIO 1 – Calcolare $\dfrac{3-2i}{-1+i}$

$$\frac{3-2i}{-1+i}=\frac{3-2i}{-1+i}\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-3-3i+2i-2}{1+1}=\frac{-5-i}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

◊

I numeri complessi sono suscettibili di una rappresentazione geometrica. Sia infatti dato un sistema di assi cartesiani *xOy*, pensando il numero complesso $z = a + ib$ come la coppia ordinata $(a,b)$, ogni numero complesso altro non è che un punto del piano cartesiano in cui, sull'asse delle ascisse si riporta la parte reale del numero complesso, mentre sull'asse delle ordinate si riporta la parte immaginaria. Per questo motivo, si parla dell'asse *x* come dell'asse reale e dell'asse *y* come dell'asse immaginario.
La distanza tra due punti $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ del piano complesso è data da

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} .$$

Data la rappresentazione geometrica, è facile comprendere come un numero complesso possa avere una rappresentazione trigonometrica.

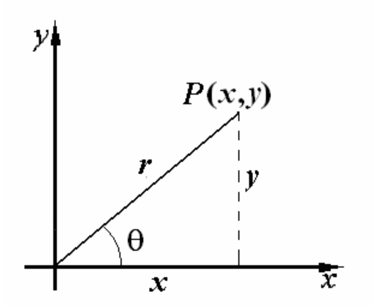

Figura 1 – Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso

Tenendo conto della figura 1, si ha:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r sen\theta$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ è il modulo del numero complesso $z = x + iy$ e θ è detta anomalia o argomento di *z* (si indica con arg *z*); si ha: $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Ne segue che un numero complesso può essere scritto nella forma trigonometrica come:

(1) $$z = x + iy = r(\cos\theta + i sen\theta)$$

Ad ogni numero complesso $z \neq 0$ corrisponde un sol valore di θ nell'intervallo $0 \le \theta \le 2\pi$. Tale intervallo viene detto intervallo principale e θ è detto argomento principale.

La seguente relazione, detta formula di Eulero,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\theta$$

permette di scrivere il numero complesso $z = x + iy$ in modo compatto: $z = re^{i\theta}$.

ESEMPIO 2 – Scrivere in forma trigonometrica e mediante la formula di Eulero il seguente numero complesso: $2 + 2\sqrt{3}i$

Si ha: modulo $r = |2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = 4$; anomalia $\theta = arccos\frac{2\sqrt{4}}{4} = \frac{\pi}{3}$. Quindi:

$$2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i sen\frac{\pi}{3}\right)$$

La rappresentazione di Eulero di tale numero è quindi: $2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$

◊

Dati due numeri complessi: $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\left(cos\,\theta_1 + isen\theta_1\right)$ e $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\left(cos\,\theta_2 + isen\theta_2\right)$, si dimostra che

(2) $$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + isen\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$$

(3) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + isen\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]$$

Generalizzando la (2) si ha:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\left[cos\left(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n\right) + isen\left(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n\right)\right]$$

e se $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, allora questa diventa:

(4) $$z^n = \left[r\left(cos\,\theta + isen\theta\right)\right]^n = r^n\left[cos\left(n\theta\right) + isen\left(n\theta\right)\right]$$

questa è la formula di de Moivre. Si osservi che $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Un numero complesso *w* è detto radice *n*-esima del numero complesso *z* se $w^n = z$. Utilizzando la formula di de Moivre si può dimostrare che se *n* è un numero intero positivo, allora:

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \left[r\left(cos\,\theta + isen\theta\right)\right]^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n\text{-}1$$

Le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$, dove n è un numero intero positivo sono dette radici n-esime dell'unità e sono date dalla formula:

$$z = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{2k\pi\, i/n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n\text{-}1$$

Geometricamente esse rappresentano gli *n* vertici di un poligono regolare di *n* lati inscritto nel cerchio di raggio 1 e centro nell'origine. Tale cerchio ha equazione $\left|z\right| = 1$.

ESEMPIO 3 – Determinare le radici di $\sqrt[3]{-1+i}$.

$$-1+i = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) + isen\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{-1+i} = 2^{\frac{1}{6}}\left[cos\left(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right)\right] \quad \text{k} = 0,1,2$$

$z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left[cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)+isen\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right];$$
$$z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left[cos\left(\frac{19}{12}\pi\right)+isen\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right]$$

◊

ESEMPIO 4 – Risolvere l'equazione $z^2+(2i-3)z+5-i=0$.

$$z=\frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$
$$-15-8i=z^2=(p+iq)^2=p^2-q^2+2ipq$$

con $p$, $q$ numeri reali. Si ha:

$$\begin{cases}p^2-q^2=-15\\2pq=-8\end{cases}\qquad\begin{cases}p=-\dfrac{4}{q}\\\dfrac{16}{q^2}-q^2=-15\end{cases}\qquad q^4-15q^2-16=0\qquad q^2=\frac{15\pm\sqrt{225+64}}{2}=\begin{cases}-1\\16\end{cases}$$

da cui si ricava $q=\pm4, p=\mp1$ e quindi $\sqrt{-15-8i}=\begin{cases}-1+4i\\1-4i\end{cases}$. Si ha:

$$z=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}=\frac{3-2i\pm(1-4i)}{2}=\begin{cases}1+i\\2-3i\end{cases}.$$

◊

ESEMPIO 5 – Rappresentare graficamente $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|=2$

Primo metodo

$|z-3|=2|z+3|$, posto $z=x+iy$, si ha $|x+iy-3|=2|x+iy+3|$

da cui $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

elevando al quadrato e semplificando si ottiene: $x^2+y^2+10x+9=0$ che è una circonferenza di centro (-5,0) e raggio 4 e che può essere scritta nella forma $(x+5)^2+y^2=16$ ovvero $|x+5|=4$.

Secondo metodo

Ricordando che $z\overline{z}=|z|^2$, l'espressione può essere scritta nella forma $\dfrac{z-3}{z+3}\cdot\dfrac{\overline{z}-3}{\overline{z}+3}=4$ da cui segue:

$\dfrac{z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9}{z\overline{z}+3z+3\overline{z}+9}=4$; $z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=4(z\overline{z}+3z+3\overline{z}+9)$; $z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=4z\overline{z}+12z+12\overline{z}+36$;

$3z\overline{z}+15z+15\overline{z}+27=0$; $z\overline{z}+5z+5\overline{z}+9=0$

$z\overline{z}+5z+5\overline{z}+25-16=z(\overline{z}+5)+5(\overline{z}+5)-16=(\overline{z}+5)(z+5)-16=|z+5|^2-16=0$, quindi

$|z+5|=4$.

◊