Integrali tripli e integrali superficiali

1 – Integrali tripli

Per quanto riguarda gli integrali tripli, ci limiteremo ad enunciare alcuni teoremi in quanto la teoria è una immediata estensione di quanto detto per gli integrali doppi.
Sia quindi D un insieme chiuso limitato, non vuoto e misurabile dello spazio ordinario ($\mathbb{R}^3$) e sia $f(x,y,z)$ una funzione definita in D.
Consideriamo ora una decomposizione qualunque dell'insieme D in n porzioni chiuse, limitate e misurabili: D_1, D_2, …, D_i, … D_n, non aventi a due a due punti interni comuni. In ciascuno di questi scegliamo un punto arbitrario $P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ (i = 1,2,…, n) e consideriamo la somma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\, misD_i$$

che è evidentemente una funzione del massimo δ dei diametro degli insiemi D_i.

DEFINIZIONE – Se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\, misD_i$$

la funzione $f(x,y,z)$ si dice ***integrabile secondo Riemann***, nell'insieme D, e il valore di questo limite si chiama integrale triplo della funzione $f(x,y,z)$ esteso all'insieme D e si indica:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

In alternativa l'integrale triplo può essere indicato con:

$$\iiint_D f(P)\,dP \qquad \text{oppure anche con} \qquad \int_D f(P)\,dP$$

La proprietà degli integrali doppi si estendono facilmente agli integrali tripli. Vedremo solo come il calcolo di un integrale triplo si può ridurre al calcolo di integrali semplici e doppi.

Se D è un dominio normale rispetto al piano xy, relativo alle funzioni $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ ed avente per base il dominio limitato e misurabile E del piano xy:

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in E \ e\ \alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)\right\}$$

e se la funzione $f(x,y,z)$ è una funzione continua in D, vale la formula:

(1)
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_E dxdy\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Se poi a sua volta il dominio E è normale rispetto all'asse x:

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \ e \ \gamma(x) \le y \le \delta(x) \right\}$$

si ha:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz . \tag{2}$$

Questa è la formula di riduzione a tre integrali semplici di un integrale triplo. Formule analoghe valgono per domini normali rispetto ai piani yz e xz.

ESEMPIO 1 – Calcolare $\iiint_D \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$ dove D è il tetraedro limitato dai tre piani coordinati e dal piano $x+y+z=1$.
Il dominio D è definito dalle limitazioni:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in E \ e \ 0 \le z \le 1-x-y \right\}$$

dove E è il triangolo del piano xy definito da: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 1$. Il dominio D è normale rispetto al piano xy, mentre E è normale rispetto all'asse x. Per la (2) si ha quindi:

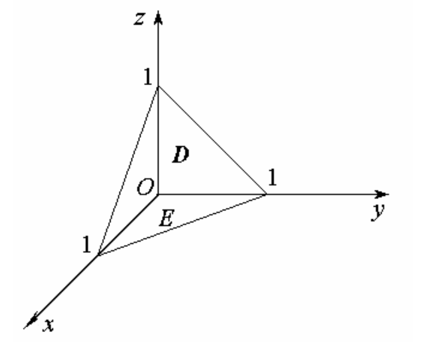

Figura 1 – Dominio relativo all'esempio 1.

$$\iiint_D \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \left(x^2+y^2+z^2\right) dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\left(x^2+y^2\right) z + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{1-x-y} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\left(x^2+y^2\right)(1-x-y) + \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 (1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x)^4 \right] dx = \frac{1}{20}$$

◊

Nel dominio Δ, dello spazio (u,v,w) siano definite tre funzioni reali $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ verificanti le seguenti ipotesi:

I) in tutto Δ sono continue insieme con le loro derivate parziali prime,

II) il determinante jacobiano

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

si mantiene sempre diverso da zero Δ,

III) detto D il dominio descritto dal punto

(3) $$x(u,v,w), \quad y(u,v,w), \quad z(u,v,w)$$

al variare di (u,v,w) in Δ, le equazioni (3) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti di D e i punti di Δ.
Si ha allora:

(4) $$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Delta f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\cdot\left|J(u,v,w)\right| dudvdw\,.$$

Consideriamo il caso particolare del cambiamento dalle coordinate cartesiane (x,y,z) alle coordinate polari (ρ,θ,φ) si ha:

$$\begin{cases} x = \rho\, sen\theta \cos\varphi \\ y = \rho\, sen\theta\, sen\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

dove ρ è il raggio vettore $(\rho \geq 0)$, θ è la colatitudine $(0 \leq \theta \leq \pi)$ e φ è la longitudine $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.
Il determinante jacobiano è quindi:

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\, sen\theta\, sen\varphi \\ sen\theta\, sen\varphi & \rho\cos\theta\, sen\varphi & \rho\, sen\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\, sen\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 sen\theta\,.$$

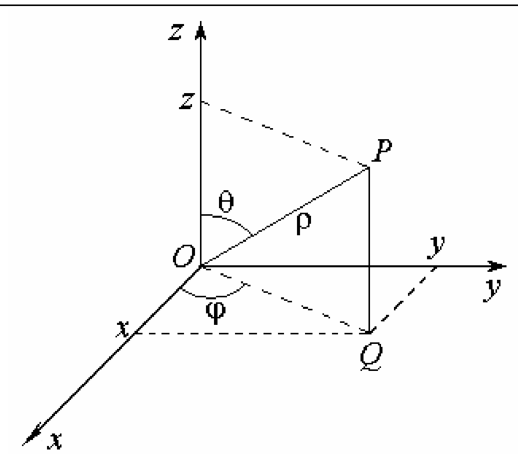

Figura 2 – Coordinate polari nello spazio o coordinate sferiche.

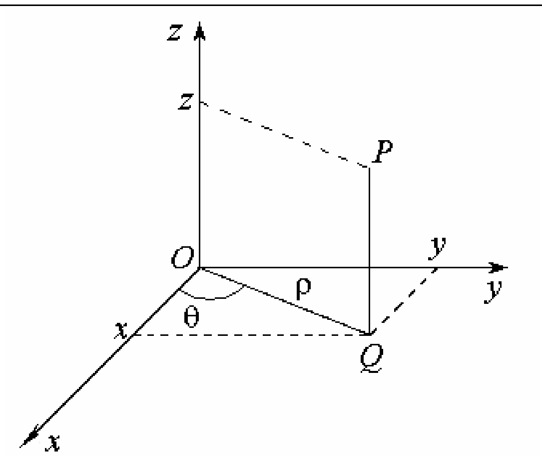

Figura 3 – Coordinate cilindriche.

Se consideriamo il caso del cambiamento dalle coordinate cartesiane (x, y, z) alle coordinate cilindriche (ρ, θ, z) si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho sen\theta \\ z = z \end{cases}$$

dove ρ il raggio vettore $(\rho \geq 0)$, θ la longitudine $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ e z la quota (se il cilindro è infinito $-\infty < z < +\infty$, se il cilindro è limitato dai piani $z = a$ e $z = b$, allora $a \leq z \leq b$).
Il determinante jacobiano è quindi:

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho sen\theta & 0 \\ sen\theta & \rho \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$

ESEMPIO 2 – Calcolare $\iiint_D e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dxdydz$ dove D è il dominio $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, ovvero la sfera di centro l'origine e raggio r.
Passando in coordinate polari si ha:

$$\iiint_D e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dxdydz = \iiint_\Delta e^{\rho^3} \rho^2 sen\theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sen\theta d\theta \int_0^{r} e^{\rho^3} \rho^2 d\rho =$$

$$= [\varphi]_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi\left(e^{r^3} - 1\right)$$

◊

ESEMPIO 3 – Calcolare $\iiint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$ dove D è la parte di spazio racchiusa dal cono circolare retto che ha vertice nell'origine per asse l'asse z e per direttrice il cerchio di raggio r situato nel piano $z = h$.

L'equazione del cono è: $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2$.

Passando in coordinate cilindriche e tenendo conto che: $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{h}{r}\rho \leq z \leq h$, si ha:

$$\iiint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \iiint_\Delta \rho^2 \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} \rho^3 d\rho \int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} dz = \frac{h\pi r^4}{10} .$$

◊

ALCUNE APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI TRIPLI.

VOLUME DI UN SOLIDO – Se $f(x,y,z) = 1$ allora: $\quad volume\ D = \iiint_D dxdydz$.

MASSA DI UN CORPO – Se $\delta(x,y,z)$ è la densità di un corpo, allora:

$$massa\ D = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dxdydz\ .$$

BARICENTRO – Se (x_G,y_G,z_G) sono le coordinate del baricentro di un corpo, allora si dimostra che:

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\quad y_G = \frac{1}{M}\iiint_D y\delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\quad z_G = \frac{1}{M}\iiint_D z\delta(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

MOMENTO D'INERZIA – Rispetto ai piani xy, yz, xz

$$I_{xy} = \iiint_D z^2\delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\qquad I_{yz} = \iiint_D x^2\delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\qquad I_{xz} = \iiint_D y^2\delta(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

MOMENTO D'INERZIA – Rispetto ad una retta r

$$I_r = \iiint_D d^2(x,y,z)\,\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

dove $d(x,y,z)$ è la distanza di un generico punto di D dalla retta r.
Si dimostra che $I_x = I_{xy} + I_{xz}$, $I_y = I_{yx} + I_{yz}$, $I_z = I_{zx} + I_{zy}$

ESEMPIO 4 – Determinare la massa di una sfera di raggio R la cui densità varia in modo direttamente proporzionale alla distanza dal centro.
Se esprimiamo l'equazione della sfera in coordinate sferiche allora la densità può essere scritta nella forma $\delta(\rho) = k\rho$ dove k è la costante di proporzionalità. In coordinate sferiche si ha quindi:

$$M = \iiint_\Delta \delta(\rho)\left|J(\rho,\theta,\varphi)\right| d\rho d\theta d\varphi = k\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi sen\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = k\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^R \left[-cos\,\theta\right]_0^\pi \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi k R^4$$

◊

ESEMPIO 5 – Determinare la massa di un cilindro di raggio R e altezza h la cui densità varia in modo direttamente proporzionale alla distanza dall'asse.
Se esprimiamo l'equazione del cilindro in coordinate cilindriche, allora la densità può essere scritta nella forma $\delta(\rho) = k\rho$ dove k è la costante di proporzionalità. In coordinate cilindriche si ha quindi:

$$M = \iiint_\Delta \delta(\rho)\left|J(\rho,\theta,z)\right| d\rho d\theta dz = k\int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = k\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_0^h = \frac{2}{3}\pi k R^3 h$$

◊

2 – Area di una superficie

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, diremo che X_1, parte non vuota di X, è ***staccata*** se esistono due insiemi aperti A_1 e A_2 tali che:

$$X_1 \subset A_1,\quad X - X_1 \subset A_2,\quad A_1 \cap A_2 = \varnothing .$$

Per contro, diremo che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$, è ***connesso*** se è privo di parti staccate, o meno rigorosamente, quando è a un solo pezzo.

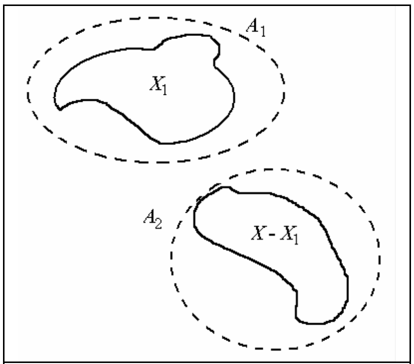

Figura 3 – Insiemi staccati.

DEFINIZIONE – Un D di $\mathbb{R}^2$ si dice dominio ***internamente connesso*** se è chiuso, se ogni punto della frontiera di D è di accumulazione per l'interno di D e se il suo interno è connesso.

Siano

(5) $$x = x(u,v),\qquad y = y(u,v),\qquad z = z(u,v)$$

tre funzioni delle variabili reali u, v definite in un dominio limitato ed internamente connesso D del piano uv.

Al variare di u, v in D, il punto $P(x,y,z)$ descrive nello spazio (x,y,z) un luogo S. Diremo che il luogo S è una superficie regolare, rappresentata dalle equazioni parametriche (5), con il dominio di base D, se le tre funzioni godono delle seguenti proprietà:

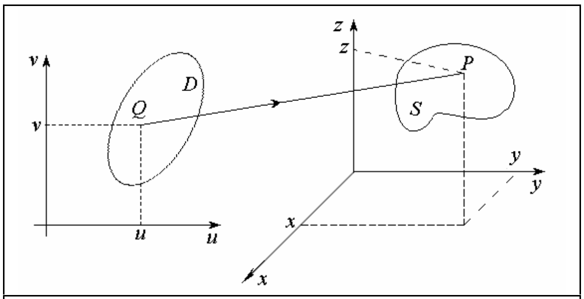

Figura 4 – Equazioni parametriche di una superficie.

1. le funzioni $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ sono continue insieme alle loro derivate parziali prime in D (frontiera inclusa)
2. la matrice

(6) $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

   ha caratteristica due in tutti i punti di D. In altre parole posto

(7) $$J_x(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\ J_y(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},\ J_z(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

   si ha:

$$J_x^2(u,v) + J_y^2(u,v) + J_z^2(u,v) > 0$$

3. non è possibile che due punti diversi (u',v'), (u'',v'') di D conducano allo stesso punto di S, ossia non è possibile che sia contemporaneamente:

$$x(u',v') = x(u'',v''),\ y(u',v') = y(u'',v''),\ z(u',v') = z(u'',v'').$$

Vi è quindi una corrispondenza biunivoca tra i punti fra i punti di D e quelli della superficie S. I punti di S che corrisppondono alla frontiera di D si chiamano ***bordo*** di S e lo indicheremo con ΓS (si legge "gamma di S".

Si dice anche che le (5) costituiscono una rappresentazione parametrica regolare della superficie S. Si osserva infine che, posto:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\ F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

risulta:

(8) $$EG-F^2=J_x^2(u,v)+J_y^2(u,v)+J_z^2(u,v)$$ [i]

Un vasto insieme di superfici regolari è definito dalle funzioni $z=f(x,y)$, definite in un dominio limitato e internamente connesso D, in cui risultino continue insieme alle loro derivate parziali prime. Infatti si può scrivere:

$$x=u,\qquad y=v,\qquad z=f(u,v)$$

che verificano le condizioni 1 e 3; la condizione 2 è anch'essa verificata in quanto da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

si ricava:

(9) $$J_x=-\frac{\partial f}{\partial x},\ J_y=-\frac{\partial f}{\partial y},\ J_z=1.$$

Sia la (5) una rappresentazione parametrica regolare sella superficie S e $P_0(x_0,y_0,z_0)$ un punto qualunque di S corrispondente al punto (u_0,v_0) di D. Esiste il piano tangente ad S in P_0 e si dimostra che ha equazione

(10) $$J_x(u_0,v_0)(x-x_0)+J_y(u_0,v_0)(y-y_0)+J_z(u_0,v_0)(z-z_0)=0$$

Si dimostra pure che la perpendicolare n in P_0 al piano tangente, che viene detta retta normale alla superficie S nel punto P_0, ha equazioni:

(11) $$\frac{x-x_0}{J_x(u_0,v_0)}=\frac{y-y_0}{J_y(u_0,v_0)}=\frac{z-z_0}{J_z(u_0,v_0)}.$$

Nel caso in cui la superficie regolare S sia rappresentata dall'equazione cartesiana $z=f(x,y)$ si ha che l'equazione del piano tangente nel punto $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ si scrive:

[i] Si lascia allo studente la dimostrazione.

(12) $$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,x_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

e la retta normale ha equazione

(13) $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Dalla (11), ricordando la definizione di coseni direttori, e utilizzando la (8), si ricava che i coseni direttori della normale *n* alla superficie *S*, in un punto *P*, sono dati da:

(14) $$cos\left(\widehat{xn}\right)=\frac{J_x(u,v)}{\pm\sqrt{EG-F^2}},\quad cos\left(\widehat{yn}\right)=\frac{J_y(u,v)}{\pm\sqrt{EG-F^2}},\quad cos\left(\widehat{zn}\right)=\frac{J_z(u,v)}{\pm\sqrt{EG-F^2}}$$

L'orientamento della normale resta definito una volta che si è scelto uno dei due segni che compare nella (14). Fissato il segno, si chiama positiva la parte della superficie rivolta dalla parte positiva di n, e negativa l'altra.

Nel caso in cui la superficie regolare *S* sia rappresentata dall'equazione cartesiana $z=f(x,y)$, ponendo $p=f_x(x,y)$ e $q=f_y(x,y)$, i coseni direttori sono dati da:

(15) $$cos\left(\widehat{xn}\right)=\frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad cos\left(\widehat{yn}\right)=\frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad cos\left(\widehat{zn}\right)=\frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Sia ora $f(x,y)$ una funzione definita in un dominio limitato internamente connesso e misurabile *D* di $\mathbb{R}^2$ in cui risulta anche continua insieme alle sue derivate parziali prime e consideriamo la superficie regolare *S* di equazione cartesiana $z=f(x,y)$. Senza entrare nei particolari, ma il ragionamento è analogo a diversi già fatti, si dimostra che l'are della superficie *S* è data da:

(16) $$area\ S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_D d\sigma.$$

L'espressione $d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$ si chiama elemento d'area della superficie regolare S di equazione $z=f(x,y)$.
Se la superficie ha una rappresentazione parametrica (5) allora si ha:

(17) $$area\ S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint_D d\sigma.$$

L'espressione $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ si chiama elemento d'area della superficie regolare *S* rappresentato dalle equazioni parametriche considerate.

ESEMPIO 6 – Calcoliamo l'area della superficie di una sfera con centro l'origine e raggio *R*.
La rappresentazione parametrica della superficie di una sfera è data da:

$$x=Rsen\theta\,cos\,\varphi,\ y=Rsen\theta sen\varphi,\ z=R\,cos\,\theta\quad \text{con}\quad 0\le\theta\le\pi\quad e\quad 0\le\varphi\le2\pi$$

Si ha quindi:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=R^2,\qquad F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}=0,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=R^2 sen^2\theta.$$

Applicando la (17) si ha:

$$area\ S=\iint_D R^2 sen\theta d\theta d\varphi=R^2\int_0^\pi sen\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=R^2\left[-cos\,\theta\right]_0^\pi\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=4\pi R^2$$

◊

3 – Integrali di superficie

Sia S una superficie regolare e le (5) una sua rappresentazione parametrica regolare con dominio di base D del piano uv, internamente connesso, limitato e misurabile.
Sia inoltre $f(x,y,z)$ una funzione continua in un dominio T dello spazio, che contenga la superficie S. Ha quindi senso calcolare la $f(x,y,z)$ nei punti di S, ottenendo una funzione $f\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]$, delle variabili u, v, definita nel dominio base D della superficie S.
In analogia con gli integrali curvilinei visti in precedenza è possibile la seguente:

DEFINIZIONE – Si chiama integrale superficiale della funzione $f(x,y,z)$ esteso alla superficie regolare S, e si indica con

$$\int_S f(x,y,z)d\sigma$$

il valore del seguente integrale doppio

(18) $$\iint_D f\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Si ha quindi per definizione:

(19) $$\int_S f(x,y,z)d\sigma=\iint_D f\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Se la superficie è chiusa a volte si utilizza il simbolo $\oint_S$.

Ancora in analogia con gli integrali curvilinei di differenziali delle coordinate, si possono definire gli integrali superficiali ai differenziali delle proiezioni di S sui piani coordinati. Per questi integrali bisogna fissare un orientamento della superficie S. Detta quindi $L(x,y,z)$ una funzione continua in un dominio che contenga la superficie regolare S, si chiamerà integrale superficiale di $L(x,y,z)dydz$ esteso alla faccia positiva di S, che verrà indicato con:

$$\int_{+S} L(x,y,z)\,dydz\,,$$

il seguente integrale:

$$\int_{S} L(x,y,z)\cos\left(\widehat{xn}\right)d\sigma\,.$$

Si pone quindi per definizione:

(20) $$\int_{+S} L(x,y,z)\,dydz = \int_{S} L(x,y,z)\cos\left(\widehat{xn}\right)d\sigma$$

da cui, ricordando le (14) e la (17), si ha:

(21) $$\int_{+S} L(x,y,z)\,dydz = \pm\iint_{D} L\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]J_x(u,v)\,dudv$$

con il segno + o – a seconda dell'orientamento fissato.

Analogamente, se $M(x,y,z)$ e $N(x,y,z)$ sono funzioni continue in un dominio che contenga *S*, per definizione si pone:

(22) $$\int_{+S} M(x,y,z)\,dzdx = \int_{S} M(x,y,z)\cos\left(\widehat{yn}\right)d\sigma$$

(23) $$\int_{+S} N(x,y,z)\,dxdy = \int_{S} N(x,y,z)\cos\left(\widehat{zn}\right)d\sigma$$

da cui segue:

(24) $$\int_{+S} M(x,y,z)\,dzdx = \pm\iint_{D} M\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]J_y(u,v)\,dudv\,.$$

(25) $$\int_{+S} N(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint_{D} N\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]J_z(u,v)\,dudv\,.$$

4 – Formule di Green nello spazio

Le formule di Green nello spazio servono per trasformare un integrale triplo in un integrale superficiale.

Sia *D* un dominio nello spazio *xyz*. Diremo che *D* è regolare rispetto al piano *xy* quando sono verificate le seguenti condizioni:

1) il dominio D è decomponibile in un numero finito di domini D_i normali rispetto al piano xy, a due a due senza punti in comune, cioè: $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ e $D_i \cap D_j = \varnothing$ se $i \neq j$;
2) la frontiera di ciascun dominio D_i (che indicheremo con ∂D_i) è una superficie decomponibile nella somma di un numero finito di superfici regolari;
3) l'intersezione delle frontiere di due qualsiasi fra i domini D_i, se non è vuota, è costituita al più da un numero finito di superfici regolari, da un numero finito di curve regolari, e da un numero finito di punti isolati.

In modo analogo si definiscono i domini regolari rispetto ai piani xz e yz.
Un dominio D dello spazio xyz si dirà regolare se è regolare rispetto ai tre piani coordinati. Inoltre la sua frontiera ∂D sarà costituita da un numero finito di superfici regolari; ognuna di queste superfici sarà chiamata ***faccia*** di ∂D. Su ogni faccia S di ∂D assumeremo come faccia positiva quella volta verso l'interno di D e perciò in ogni punto di S la retta normale risulta orientata verso l'interno di D, la indicheremo con n_i e la chiameremo ***normale interna***. La faccia positiva della frontiera di D verrà indicata con $+\partial D$.

TEOREMA DI GREEN NELLO SPAZIO – Se D è un dominio nello spazio xyz, regolare rispetto al piano e yz, e $f(x,y,z)$ una funzione continua in D assieme alla sua derivata prima rispetto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, frontiera inclusa, si ha:

(26) $$\iiint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdydz = -\int_{+\partial D} f(x,y,z)\, dydz .$$

Analogamente, se D è regolare rispetto al piano e zx, e $g(x,y,z)$ è continua in D insieme alla $\frac{\partial g}{\partial y}$, frontiera inclusa, si ha:

(27) $$\iiint_D \frac{\partial g}{\partial y} dxdydz = -\int_{+\partial D} g(x,y,z)\, dzdx ,$$

ed infine, se D è regolare rispetto al piano e xy, e $h(x,y,z)$ è continua in D insieme alla $\frac{\partial h}{\partial z}$, frontiera inclusa, si ha:

(28) $$\iiint_D \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz = -\int_{+\partial D} h(x,y,z)\, dxdy .$$

Omettiamo la dimostrazione.

Le relazioni (26), (27), (28), tenendo conto delle (20), (22), (23), possono essere scritte nella forma:

(29) $$\iiint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdydz = -\int_{\partial D} f \cos\left(\widehat{xn_i}\right) d\sigma$$

(30) $$\iiint_D \frac{\partial g}{\partial y} dxdydz = -\int_{\partial D} g \cos\left(\widehat{yn_i}\right) d\sigma$$

(31) $$\iiint_D \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz = -\int_{\partial D} h \cos\left(\widehat{zn_i}\right) d\sigma$$

Mostriamo alcune applicazioni delle formule di Green.

TEOREMA DELLA DIVERGENZA – Se il dominio D è regolare allora valgono simultaneamente le (29), (30) e (31) e, sommando membro a membro si ha:

(32) $$\iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dxdydz = -\int_{\partial D} \left[f\, cos\left(\widehat{xn_i}\right) + g\, cos\left(\widehat{yn_i}\right) + h\, cos\left(\widehat{zn_i}\right) \right] d\sigma$$

Sia $\vec{u}$ un vettore, applicato al punto $P(x,y,z)$, di componenti $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$; la funzione $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$ si chiama ***divergenza del vettore*** $\vec{u}$, e si indica con $div\vec{u}$. Si scrive anche

$$div\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Se indichiamo con $\vec{n_i}$ il versore della normale interna, in P, alla frontiera di D, la (32) esprime il teorema della divergenza:

(33) $$\iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dxdydz = -\int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n_i} d\sigma .$$

Il secondo membro della (33) è il flusso del vettore $\vec{u}$ uscente da ∂D.

FORMULA DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI TRIPLI

Le formule di Green si possono interpretare come formule di riduzione per gli integrali tripli, nel senso che trasformano integrali tripli in integrali di superficie e quindi doppi. In particolare, se nella (26) poniamo $f(x,y,z) = x$, si ottiene:

$$volume\ D = \iiint_D dxdydz = -\int_{+\partial D} xdydz .$$

5 – Teorema di Stokes

Il teorema di Stokes permette di trasformare un integrale superficiale esteso ad una superficie regolari S, in un integrale curvilineo esteso al bordo di S.

Siano le (5) una rappresentazione parametrica regolare di una superficie S su un dominio D internamente connesso e regolare. Supponiamo inoltre che le tre funzioni $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ e $z = z(u,v)$ possiedano in D la derivata seconda mista continua. Alla frontiera ∂D di D, costituita da curve regolari del piano uv, corrispondono altrettante curve regolari nello spazio il cui insieme costituisce il bordo ΓS di S. Prendiamo, come al solito, come verso positivo di ∂D quello del moto di un osservatore lungo ∂D che lasci l'interno di D alla sua sinistra; questo individua su ΓS un verso che assumeremo come positivo. Infine assumeremo come faccia positiva di S assumiamo quella per la quale nelle (14) vale il segno +.

TEOREMA DI STOKES – Se la superficie regolare S soddisfa alle ipotesi dette sopra, e se le funzioni $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ sono continue in un dominio che contiene S, sussiste la formula:

(34) $$\iint_{+S}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)dxdy\right]=\int_{+\partial S}(Ldx+Mdy+Ndz)$$

o, quella equivalente:

Inoltre la (34) si può scrivere nella forma

(35) $$\iint_{+S}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)cos\left(\widehat{xn}\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)cos\left(\widehat{yn}\right)+\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)cos\left(\widehat{zn}\right)\right]d\sigma=$$
$$=\int_{+\partial S}\left(L\frac{dx}{ds}+M\frac{dy}{ds}+N\frac{dz}{ds}\right)ds$$

dove *s* è l'ascissa curvilinea fissata sul bordo ΓS di *S*.

Se indichiamo $\vec{u}$ un vettore applicato al punto *P*(*x*,*y*,*z*), di componenti *L*(*x*,*y*,*z*), *M*(*x*,*y*,*z*), *N*(*x*,*y*,*z*), il vettore che ha come componenti $\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}$, $\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}$ si chiama ***rotore del vettore*** $\vec{u}$ e si indica con $rot\vec{u}$. Si ha anche:

$$rot\vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ L & M & N\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)\vec{k}\ .$$

Dove × indica il prodotto vettoriale e $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ sono i versori degli assi cartesiani. Il versore della retta normale alla superficie *S* è $\vec{n}=\left(cos\left(\widehat{xn}\right),cos\left(\widehat{yn}\right),cos\left(\widehat{zn}\right)\right)$. Inoltre il versore della tangente al ΓS è $\vec{t}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dx}{ds}\right)$. In definitiva il teorema di Stokes si scrive anche nella forma:

(36) $$\int_S rot\vec{u}\cdot\vec{n}d\sigma=\int_{\Gamma S}\vec{u}\cdot\vec{t}ds\ .$$