ESERCIZI

Calcolare il valore dei seguenti integrali tripli:

1) $\iiint_D xy^2z^3dxdydz$ dove D è il parallelepipedo che ha gli spigoli di lunghezza 1, 2, 3 disposti lungo gli assi coordinati. $[27]$

2) $\iiint_D zdxdydz$ dove D è il dominio rappresentato in figura 1. $\left[\frac{2}{3}\right]$

3) $\iiint_D dxdydz$ dove D è il dominio limitato dalla superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ e dal piano $z = k^2$. $\left[\frac{\pi k^4}{2}\right]$

4) $\iiint_D z\sqrt{1-y^2}dxdydz$ dove D è il cilindro circolare retto di altezza 1 che ha per asse l'asse z e per base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 (vedi figura 2). $\left[\frac{4}{3}\right]$

5) $\iiint_D xz^3dxdydz$ dove D è il solido contenuto nel primo ottante e limitato dalle superfici di equazione $y = 4x^2 + 9z^2$ e $y = 1$ (vedi figura 3). $\left[\frac{1}{31104}\right]$

6) $\iiint_D (x+y+z)^2 xyzdxdydz$ dove D è il tetraedro limitato dai piani: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. Si effettui il seguente cambiamento di variabili: $x = u(1-v)$, $y = uv(1-w)$, $z = uvw$. $\left[\frac{1}{960}\right]$

7) $\iiint_D xyzdxdydz$ dove D è il tetraedro limitato dai piani: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. $\left[\frac{1}{720}\right]$

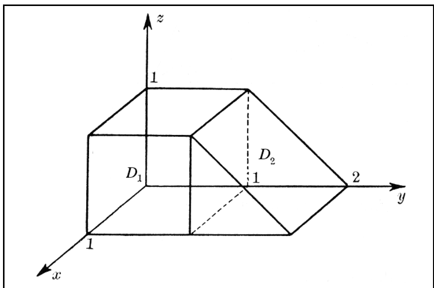

Figura 1

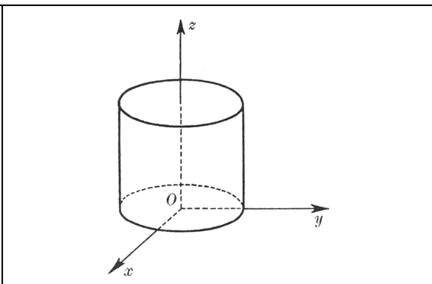

Figura 2

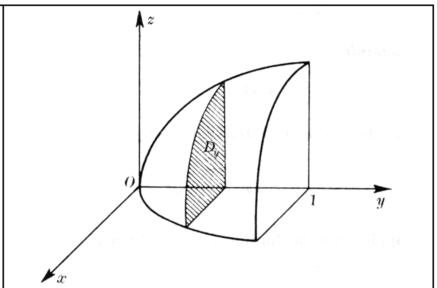

Figura 3

Facendo uso degli integrali tripli calcolare i seguenti volumi:

8) interno a $x^2 + y^2 = 9$, sopra a $z = 0$, sotto a $x + z = 4$. $[36\pi]$

9) limitato dai piani coordinati e da $6x + 4y + 3z = 12$. $[4]$

10) interno a $x^2 + y^2 = 4x$, sopra a $z = 0$, sotto a $x^2 + y^2 = 4z$. $[6\pi]$

11) interno a $\rho^2 = 16$, sopra a $z = 0$, sotto a $2z = y$.

(si faccia uso delle coordinate cilindriche) $\left[\frac{64}{3}\right]$

Calcolare il baricentro dei seguenti volumi:

12) Sotto a $z^2 = xy$ e sopra al triangolo $y = x$, $y = 0$, $x = 4$ nel piano $z = 0$ $\left[3, \frac{9}{5}, \frac{9}{8}\right]$

13) Del solido dell'esercizio 9. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right]$

14) Del solido dell'esercizio 10. $\left[\frac{8}{3}, 0, \frac{10}{9}\right]$

15) Del solido dell'esercizio 11 $\left[0, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{16}\right]$

Trovare i momenti di inerzia I_x, I_y, I_z, dei seguenti volumi di densità costante δ.

16) Esercizio 9. $\left[I_x = \frac{5}{2}M, I_y = 2M, I_z = \frac{13}{16}M\right]$

17) Esercizio 10. $\left[I_x = \frac{55}{18}M, I_y = \frac{175}{18}M, I_z = \frac{80}{9}M\right]$

18) Calcolare il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo di densità δ, di raggio *r* e altezza *h* rispetto al suo asse di simmetria. $\left[I = \frac{1}{2}Mr^2\right]$

19) Calcolare il momento d'inerzia di un cilindro cavo, omogeneo di densità δ, di raggio interno r_1 e raggio esterno r_2 e di altezza *h* rispetto al suo asse di simmetria. $\left[I = \frac{1}{2}M\left(r_2^2 + r_1^2\right)\right]$

20) Calcolare il momento d'inerzia di un parallelepipedo omogeneo di densità δ, di spigoli *a*, *b*, *c* rispetto ad uno degli spigoli. $\left[I_a = \frac{1}{12}M\left(b_2^2 + c_1^2\right)\right]$

21) Determinare la massa di una sfera di raggio *r* se la densità varia inversamente al quadrato della distanza dal centro.
$[M = 4k\pi r]$

22) Determinare la massa di un cilindro di raggio e altezza *h*, se la densità varia inversamente alla distanza dal centro. $[M = 2k\pi rh]$

23) Determinare la massa di un cilindro di raggio r e altezza h, se la densità varia proporzionalmente alla distanza dalla base. $\left[M = \frac{1}{2}k\pi r^2 h^2\right]$

Calcolare le aree delle seguenti superfici.

24) Calcolare l'area della porzione S di superficie: $z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ che si proietta nel triangolo D determinato dalle rette: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. $\left[\frac{116}{15}\right]$

25) Calcolare l'area della finestra di Viviani. La finestra di Viviani è la parte della superficie sferica: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, interna al cilindro $x^2 + y^2 - rx = 0$. $\left[2\pi r^2 - 4r^2\right]$

26) Calcolare l'area della superficie regolare di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}\cos v \cdot \operatorname{sen} u$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} v \cdot \operatorname{sen} u$, $z = \cos u$, con $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$. $\left[2\sqrt{2}\pi\left(\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} - 1\right)\right)\right]$

27) Calcolare l'area della superficie laterale di un cono circolare retto di raggio di base r e altezza h. Si ponga il cono con il vertice nell'origine e l'asse coincidente con l'asse z, in queste condizioni l'equazione della superficie è data da: $z = \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}$. $\left[\pi r\sqrt{r^2 + h^2}\right]$

Calcolare i seguenti integrali di superficie.

28) $\int_S \left(x^2 + y^2\right) d\sigma$ dove S è la porzione di superficie della funzione $g(x, y) = xy$ all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 8$. $\left[\frac{1192}{15}\pi\right]$

29) $\int_S x\, d\sigma$ dove S è la semisfera di centro l'origine e raggio r contenuta nel semispazio $x \ge 0$. $\left[\pi r^3\right]$

30) $\int_S \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma$ dove S è la superficie laterale del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, con $0 \le z \le 1$. $\left[\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}\right]$

31) $\int_S yz\,dydz + xz\,dzdx + xy\,dxdy$ dove S è la faccia esterna del tetraedro limitato dai piani: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$. $[0]$

32) $\int_S z\,dxdy$ dove S è la faccia esterna dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. $\left[\frac{4}{3}\pi abc\right]$

33) $\int_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ dove S è la faccia esterna della semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, con $z \ge 0$. $\left[\frac{1}{2}\pi r^4\right]$