ESERCIZI

Calcolare il valore dei seguenti integrali curvilinei:

1) $\int_\gamma xyds$ dove γ è il contorno del quadrato $|x|+|y|=a$ con $a>0$ $[0]$

2) $\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}ds$ dove γ è il segmento della retta che congiunge i punti $O(0,0)$ ed $A(1,2)$

$\left[ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right]$

3) $\int_\gamma \left(x^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right)ds$ dove γ è l'arco di curva di equazione $y=ln\,x$ che va dal punto di ascissa 1 al punto di ascissa e. $\left[\frac{3-4\sqrt{2}}{6}\right]$

4) $\int_\gamma xyds$ dove γ è un quarto dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ che si trova nel primo quadrante.

$\left[\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}\right]$

5) $\int_\gamma y^2ds$ dove γ è il primo arco della cicloide $x=a(t-sin\,t)$, $y=a(1-cos\,t)$ $0\le t\le 2\pi$. $\left[\frac{256}{15}a^3\right]$

6) $\int_\gamma \sqrt[4]{x^2+y^2}ds$ dove γ è la cardioide di equazione polare $\rho=1+cos\,\theta$, per $0\le\theta\le 2\pi$.

$\left[2\sqrt{2}\pi\right]$

7) $\int_\gamma xyds$ dove γ è l'arco di curva di equazioni parametriche $x=sent\cdot cos\,t$, $y=sen^2t$; $0\le t\le\pi$. $[0]$

8) $\int_\gamma (x+xy)ds$ dove γ è l'arco di circonferenza $x=r\,cos\,t$, $y=rsent$; $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ $\left[\frac{r^2}{2}(2+r)\right]$

9) $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds$ dove γ è l'arco di Archimede di equazioni $x=t\,cos\,t$, $y=tsent$; $0\le t\le 2\pi$

$\left[\frac{1}{3}\left[\left(1+4\pi^2\right)^{3/2}-1\right]\right]$

10) $\int_\gamma (x+z)ds$ dove γ è l'arco di curva $x=t$, $y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$; $0\le t\le 1$ $\left[\frac{56\sqrt{7}-1}{54}\right]$

11) $\int_\gamma \left(x^2+y^2+z^2\right)ds$ dove γ è l'arco di elica circolare di equazioni parametriche $x = r\cos t$, $y = r sen t$, $z = kt$; $0 \le t \le \pi$ $\left[\pi\sqrt{r^2+k^2}\left(r^2+\frac{\pi^2}{3}k^2\right)\right]$

Calcolare gli integrali curvilinei di seconda specie

12) $\int_\gamma \left(xy+y^2\right)dy$ dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$ compreso tra i punti (0,0) e (2,4). $\left[\frac{512}{15}\right]$

13) $\int_\gamma y\cos x\,dy$ dove γ è l'arco di curva di equazione $y = senx$, che va dal punto di ascissa 0 al punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

14) $\int_\gamma x\,dy$ dove γ è l'arco di curva di equazione $y = \int_{-x}^{x} e^{t^2}dt$, $0 \le x \le 1$, orientata nel verso delle ascisse crescenti. $\left[(e-1)\right]$

15) $\int_\gamma x\,dy$ dove γ è l'arco di curva di equazione $y = \int_0^{e^x} ln\left(t+e^x\right)dt$, $0 \le x \le 1$, orientata nel verso delle ascisse crescenti. $\left[2(ln 2-1)+e\right]$

16) $\int_\gamma y^2dx$ dove γ è la semicirconferenza di raggio 1, centro nel punto (1,0) con $y \ge 0$ e percorsa nel verso antiorario. $\left[-\frac{4}{3}\right]$

17) $\int_\gamma (x+y)dx$ dove γ è il contorno del campo situato nel primo quadrante e delimitato dall'asse *x*, dalla circonferenza $x^2+y^2=1$ e dalla retta per l'origine che forma con l'asse delle *x* un angolo di 60°, percorso in senso orario. $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

18) $\int_\gamma \frac{x^2}{x^2+y^2}dx$ dove γ è la semicirconferenza $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r \le x \le r$, percorsa in senso orario. $\left[\frac{2}{3}r\right]$

19) $\int_\gamma \frac{x}{y^2}dx$ dove γ è l'arco di curva di equazione $y = e^x$ che va dal punto di ascissa 0 al punto di ascissa $\frac{1}{2}$. $\left[\frac{1}{9}-\frac{5}{18}e^{3/2}\right]$

20) $\int_\gamma \left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy+y^2\right)dy$ dove γ è l'arco di parabola $y=x^2$ compreso tra i punti $A(1,1)$ e $B(2,4)$. $\left[\frac{76}{3}\right]$

21) $\int_\gamma (2a-y)\,dx+x\,dy$ dove γ è il primo arco della cicloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. $\left[-2\pi a^2\right]$

22) $\int_{OA} 2xy\,dx-x^2dy$ calcolati lungo i cammini che iniziano dall'origine e terminano nel punto $A(2,1)$

a. lungo la retta OA $\left[\frac{4}{3}\right]$
b. lungo la parabola con vertice in O che ha per asse di simmetria l'asse y $[0]$
c. lungo la parabola con vertice in O che ha per asse di simmetria l'asse x $\left[\frac{12}{5}\right]$
d. lungo la linea spezzata OBA, $B(2,0)$ $[-4]$
e. lungo la linea spezzata OCA, $C(0,1)$ $[4]$

23) $\int_\gamma \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ calcolato lungo la circonferenza $x^2+y^2=a^2$ in senso antiorario. [–2π; indicazioni: utilizzare le equazioni parametriche della circonferenza]

24) $\int_\gamma y^2dx+x^2dy$ dove C è la semiellisse superiore $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ percorsa in senso orario. $\left[\frac{4}{3}ab^2\right]$

25) $\int_{AB} \cos y\,dx-\sin x\,dy$ preso sul segmento AB della bisettrice del secondo e quarto quadrante, se $x_A = y_B = 2$. $[-2\sin 2]$

Calcolare i seguenti integrali doppi

26) $\iint_D (2x+3y)\,dxdy$ dove D è la regione comprese tra la parabola di equazione $y=x^2$ e la retta di equazione $y = x$. $\left[\frac{11}{30}\right]$

27) $\iint_D \frac{x}{1+y}\,dxdy$ dove D è il settore circolare limitato dall'asse x dalla bisettrice $y = x$ e dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$, nel primo quadrante.

$\left[ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1 \right]$

28) $\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$ dove D è il dominio limitato dalla parabola $y^2=4x$, dalla retta $y=2$ e dall'asse y. $\left[\frac{178}{105}\right]$

29) $\iint_D sen\left(x-y\right) dxdy$ dove D è il triangolo definito $x\le\frac{\pi}{2},\ y\le\frac{\pi}{2},\ x+y\ge 0$. $[0]$

30) $\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+y} dxdy$ dove D è il triangolo definito $x\le 1,\ y\le 1,\ x+y\ge 1$. $\left[\frac{4}{3}ln2-\frac{5}{9}\right]$

31) $\iint_D \frac{x^2y}{x^2+y^2} dxdy$ dove D è la parte della corona circolare limitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2, contenuta nel primo quadrante. $\left[\frac{7}{9}\right]$

32) $\iint_D \frac{1}{x+y+2} dxdy$ dove D è il triangolo che ha per vertici i punti $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. $\left[\frac{2-ln3}{2}\right]$

33) $\iint_D dxdy$ dove D è il dominio definito dalle limitazioni $x^2+y^2\le 2$ e $y-x^2\le 0$. $\left[\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{3}\right]$

34) $\iint_D xydxdy$ dove D è il triangolo di vertici $A=(0,4)$, $B=(1,1)$, $C=(4,0)$. $\left[\frac{26}{3}\right]$

Per il calcolo dei seguenti integrali doppi si faccia uso delle coordinate polari

35) $\iint_D \left(x+y\right) dxdy$ dove D è il settore circolare di centro l'origine e raggio 1, entro cui $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

36) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ dove D è il dominio limitato dalla curva di equazione polare $\rho = sen2\theta$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{2}{9}\right]$

37) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ dove D è la parte di piano compresa tra la circonferenza di diametro 1 con centro nel punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e la circonferenza di diametro 2 con centro in $(1,0)$. $[2]$

38) $\iint_D x\,dx\,dy$ dove D è il dominio definito dalle limitazioni $(x-1)^2+y^2\le 1,\quad y\ge 0$.

$\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

39) $\iint_D \dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}}\,dx\,dy$ dove D è il dominio definito dalle limitazioni $1\le x^2+y^2\le 4$, $y\ge 0$.

$\left[2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\right]$

40) $\iint_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ dove D è il semicerchio di centro $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ e raggio $\dfrac{1}{2}$ e giacente nel primo quadrante.

$\left[\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2}{9}\right]$