Funzioni a due variabili

1 – Generalità

Sia $P_0(x_0,y_0)$ un punto del piano, si chiama "intorno circolare di P_0 di raggio $\varepsilon > 0$" l'insieme dei punti del piano la cui distanza da P_0 è minore di ε; in altri termini, un intorno circolare di $P_0(x_0,y_0)$ di raggio e è l'insieme delle coppie ordinate (x,y) tale che:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2 .$$

Nel piano cartesiano tale insieme è un cerchio di centro $P_0(x_0,y_0)$ e raggio ε, esclusa la circonferenza.

Si chiama "intorno rettangolare", di dimensioni $2h$ e $2k$, del punto $P_0(x_0,y_0)$, l'insieme dei punti del piano le cui coordinate soddisfano alle condizioni:

$$\begin{cases} |x-x_0|<h \\ |y-y_0|<k \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_0-h<x<x_0+h \\ y_0-k<y<y_0+k \end{cases}$$

È facile rendersi conto che in ogni intorno circolare di un punto P_0 è contenuto un intorno rettangolare e viceversa.
Sia A un insieme di punti del piano, si dice che un punto $P \in A$ è "interno " ad A se esiste un intorno di P interamente contenuto in A. Si dice che $P \notin A$ è "esterno" ad A se esiste un intorno di P che non contiene punti di A. Si dice che P, appartenente o no ad A, è un "punto di frontiera" per A, se ogni intorno di P contiene sia punti di A, sia punti che non appartengono ad A. La "frontiera" di A è l'insieme dei punti di frontiera per A.
Si dice che un punto $P \in A$ è "isolato" se esiste un intorno di P che non contiene altri punti di A (ad eccezione di P).

<u>ESEMPIO 1</u> – Si consideri l'insieme $A=\{(x,y): x\geq 0, y>0\}\cup\{(-n,-n): n\in\mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0$ è l'insieme dei numeri naturali, zero escluso, $\mathbb{N}_0=\{1,2,3...\}$.

L'insieme $B=\{(x,y): x\geq 0, y>0\}$ è il primo quadrante con il semiasse positivo delle y.
$C=\{(-n,-n): n\in\mathbb{N}_0\}$ è l'insieme dei punti del terzo quadrante che stanno sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e che assumono valori naturali.
Il punto $P(1,1) \in A$, è interno ad A.
Il punto $Q(2,-1) \notin A$, è esterno ad A.
Il punto $R(0,3) \in A$ e l'origine $O(0,0) \notin A$, sono punti di frontiera per A.
I punti $S(-1,-1) \in A$ e $T(-2,-2) \in A$ sono punti isolati.
La frontiera di A è costituita dai semiassi positivi e dai punti $(-1,-1)$, $(-2,-2)$, $(-3,-3)$, ...

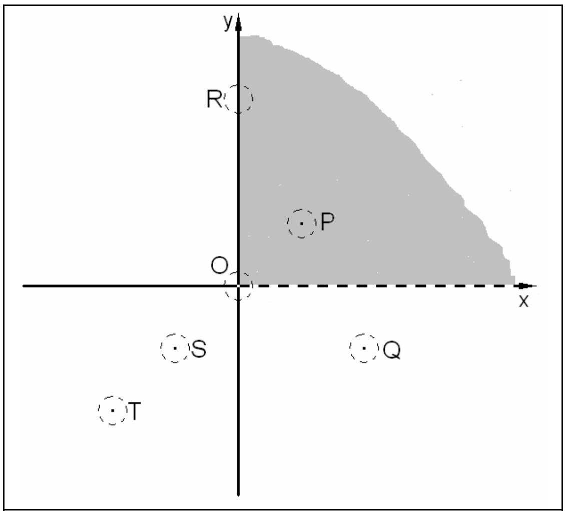

Figura 1 – Rappresentazione grafica dell'insieme dell'esempio 1

◊

Un insieme di punti del piano si dice "aperto" se tutti i suoi punti sono interni. Si dice "chiuso" un insieme che contiene tutta la propria frontiera. Si osservi che possono esistere insiemi che non né aperti né chiusi.

Si può dimostrare che un insieme di punti del piano è aperto se, e solo se, non contiene alcun punto della propria frontiera.
Si ha quindi che:
- insiemi che contengono tutti i punti della propria frontiera sono chiusi;
- insiemi che non contengono alcun punto della propria frontiera sono aperti;
- insiemi che contengono alcuni punti della propria frontiera non sono né aperti né chiusi.

<u>ESEMPIO 2</u> – L'insieme $A = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ è aperto. Basta considerare, per ogni punto $P(x_0,y_0) \in A$ un intorno rettangolare di dimensioni x_0, y_0, ossia

$$\begin{cases} |x - x_0| < \dfrac{x_0}{2} \\ |y - y_0| < \dfrac{y_0}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \dfrac{x_0}{2} < x < \dfrac{3}{2} x_0 \\ \dfrac{y_0}{2} < y < \dfrac{3}{2} y_0 \end{cases}$$

Tali insiemi sono contenuti in A.

◊

<u>ESEMPIO 3</u> – L'insieme $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ è chiuso. Se si considera il punto $P(x_0,0)$, esso è di frontiera per A, infatti, preso un qualunque intorno circolare di raggio e, esso contiene anche punti che non appartengono ad A. $P(x_0,0)$ è anche punto di A. Con ragionamento analogo si verifica che $Q(0,y_0) \in$ A ed è di frontiera.

◊

<u>ESEMPIO 4</u> – L'insieme $A = \{(x, y) : x \geq 0, y > 0\}$ non è né aperto né chiuso. Il punto $P(x_0,0) \notin$ A ed è di frontiera; anche il punto $Q(0,y_0)$ è di frontiera, ma appartiene ad A.

◊

Un insieme A di punti del piano si dice "limitato" se esiste un intorno dell'origine che lo contiene; si dice "illimitato" in caso contrario.

OSSERVAZIONE – Non si deve confondere i concetti di insieme finito[i] e insieme infinito con quello di insieme illimitato e insieme illimitato. Infatti un insieme finito è necessariamente limitato, mentre un insieme infinito può essere sia limitato sia illimitato.

<u>ESEMPIO 5</u> – L'insieme dei punti dell'ellisse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ è limitato.

Basta osservare che la l'insieme $x^2 + y^2 \leq 4$ è un intorno dell'origine e contiene tutti i punti dell'ellisse. Si osservi inoltre che l'ellisse è un insieme infinito.

◊

[i] Si ricorda che un insieme si dice finito se è costituito da un numero finito di elementi.

<u>ESEMPIO 6</u> – La parabola $y^2 = x$ contiene infiniti punti (e quindi è un insieme infinito) ed è illimitato. Infatti, considerata una circonferenza di centro l'origine e raggio *r*, il punto $P\left(r, \sqrt{r}\right)$ appartiene alla parabola, ma non è contenuto nel cerchio $x^2 + y^2 \leq r^2$; infatti $d\left(O, P\right) = \sqrt{r^2 + r} > r$.

◊

Sia *A* un insieme di punti del piano e *P* un punto del piano che può appartenere oppure no ad *A*. Si dice che *P* è un "punto d'accumulazione" per *A* se ogni intorno di *P* contiene almeno un punto di *A* distinto da *P*. Si deduce che se *P* è un punto d'accumulazione per *A*, in ogni intorno di *P* cadono infiniti punti di *A*.

2 – Funzioni in due variabili

DEFINIZIONE – Una funzione reale in due variabili reali è una legge, *f*, di natura qualsiasi che permette di associare ad ogni coppia di numeri reali (*x*,*y*), appartenenti al dominio di *f* (il dominio della funzione *f* verrà indicato con $D(f)$), sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, un numero reale *z*.
Si scrive *f*: (*x*,*y*) → *z* oppure *z* = *f*(*x*,*y*). In alcuni casi anche *z* = *f*(*P*) essendo *P* un punto del piano di coordinate (*x*,*y*). *z* si dice immagine di (*x*,*y*).
Il dominio *D*(*f*) di una funzione reale di due variabili reali è l'insieme di tutte le coppie (*x*,*y*) per le quali è possibile determinare il valore *f*(*x*,*y*).

La ricerca del dominio di una funzione di due variabili in genere si riduce alla risoluzione di equazioni, disequazioni o sistemi di disequazioni in due variabili. Nel seguito vedremo alcuni dei casi di disequazioni in due variabili più ricorrenti.

Iniziamo dalle disequazioni di primo grado; esse possono essere sempre ricondotte alla forma:

$$ax + by + c > 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax + by + c \geq 0.$$

Concentriamo la nostra attenzione alla prima. Risolvere tale disequazione significa trovare le coppie (*x*; *y*) che soddisfano alla disuguaglianza data. A tale disequazione può essere associata la retta di equazione $ax + by + c = 0$. La soluzione della disequazione si riduce quindi a determinare quale dei due semipiani in cui la retta divide il piano contiene i punti *P*(*x*; *y*) che soddisfano la disequazione.
Un esempio chiarirà il concetto.

<u>ESEMPIO 7</u> – Risolvere la disequazione

$$2 - y > \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

La disequazione è equiva–lente a: $2x + 4y - 5 < 0$.
Disegnando su di un piano cartesiano *xOy* la retta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ (vedi figura 2) il piano resta diviso in due semipiani: uno sopra la retta, l'altro sotto. Per determinare quale dei due è soluzione, basta scegliere un punto e vedere se le sue coordinate soddisfano la disequazione; quando è possibile (come

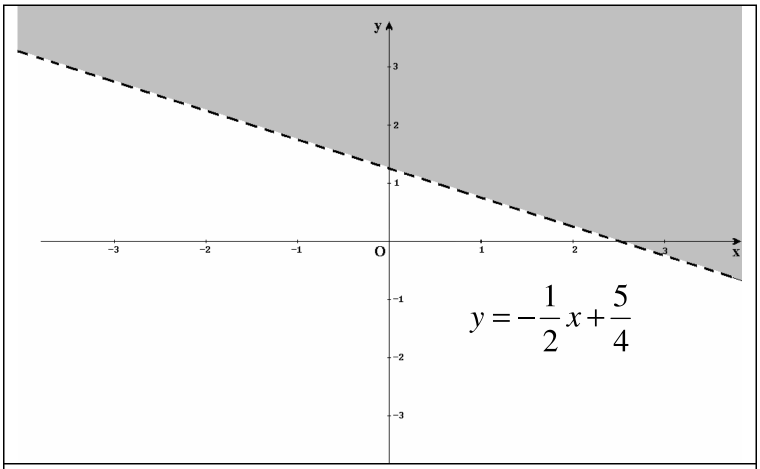

Figura 2 – Relativa all'esempio 7

in questo caso) conviene prendere l'origine $O(0; 0)$.
Si ottiene: $2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$ e quindi la disequazione è soddisfata. L'origine si trova quindi nel semipiano che soddisfa la disequazione (nella figura 2 in grigio il semipiano che non è soluzione della disequazione. Adotteremo quindi la convenzione di colorare in grigio la regione del piano che non soddisfa alla disequazione).
Nella disequazione abbiamo indicato il segno di ">", quindi i punti della retta (dove vale il segno di "=") non fanno parte dell'insieme delle soluzioni e la retta va tratteggiata.

◊

Con ragionamento analogo si possono risolvere disequazioni in due variabili di qualunque tipo nella forma $E(x; y)>0$, purché si sappia rappresentare la curva di equazione $E(x; y) = 0$. Vediamo alcuni esempi.

<u>ESEMPIO 8</u> – Risolvere la disequazione $y \geq x^2 - 1$.

L'equazione $y = x^2 - 1$ ha per diagramma la parabola in figura 3. L'origine $O(0; 0)$ soddisfa la disequazione ($0 \geq 0^2 - 1 = -1$) si trova quindi nel semipiano delle soluzioni (nella figura 3). I punti della parabola soddisfano la disequazione (sono quelli per i quali vale l'uguaglianza)

◊

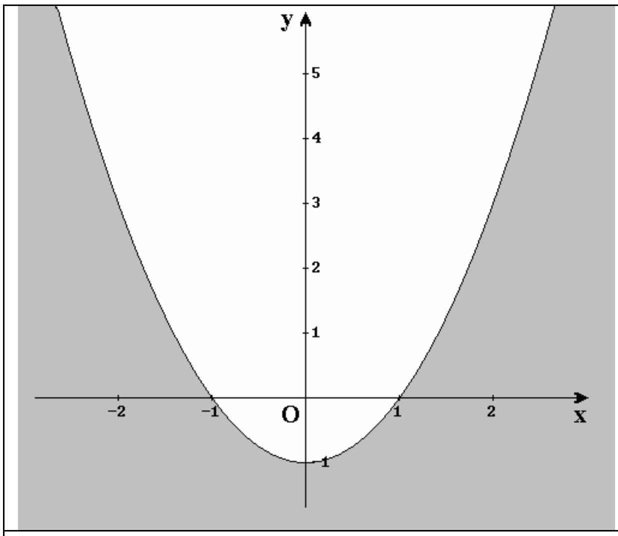

Figura 3 – Relativa all'Esempio 8

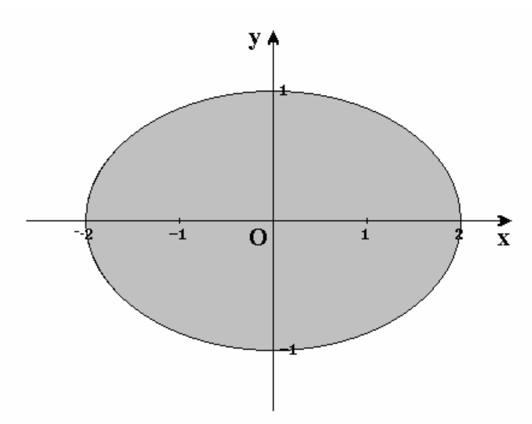

Figura 4 – Relativa all'esempio 9

<u>ESEMPIO 9</u> – Risolvere la disequazione $x^2 + 4y^2 \geq 4$.

L'equazione $x^2 + 4y^2 = 4$, che può essere scritta nella forma $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ha per diagramma l'ellisse di figura 3. L'origine O(0; 0) non soddisfa la disequazione ($0^2 + 4 \cdot 0^2 = 0 < 4$) non si trova quindi nel semipiano delle soluzioni (figura 4).

◊

<u>ESEMPIO 10</u> – Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq 2\sqrt{2}$.

Poiché per $x^2 + y^2 - 1 < 0$ il primo membro della disequazione perde di significato, i valori che soddisfano tale disequazione devono essere esclusi dal piano. Elevando quindi al quadrato i due membri della disequazione si ha: $x^2 + y^2 - 1 \leq 8$ ovvero $x^2 + y^2 \leq 9$.

Si osservi che $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ sono le equazioni di

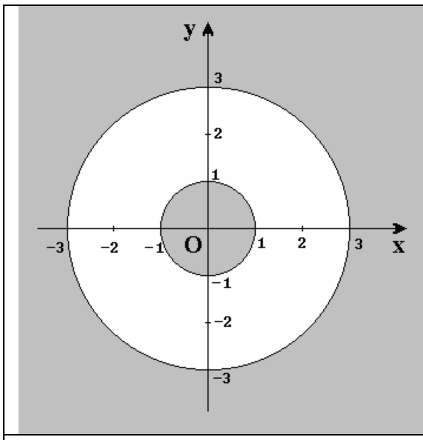

Figura 5 – Relativa all'esempio 10

due circonferenze di centro l'origine e raggio rispettivamente 1 e 3. Come si può facilmente intuire la disequazione $x^2 + y^2 \le 9$ è soddisfatta da tutti i punti interni alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$ più quelli della circonferenza, ma per ottenere la soluzione bisogna togliere i punti interni alla circonferenza di raggio 1. La soluzione è pertanto la corona circolare di centro l'origine di raggio interno 1 e raggio esterno 3, circonferenze comprese (vedi figura 5).

◊

Il grafico di una funzione reale di due variabili reali è l'insieme dei punti dello spazio per i quali si ha $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$, ovvero l'insieme

$$\gamma = \{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2\}$$

ed è una superficie nello spazio (vedi figure 6 – 8)

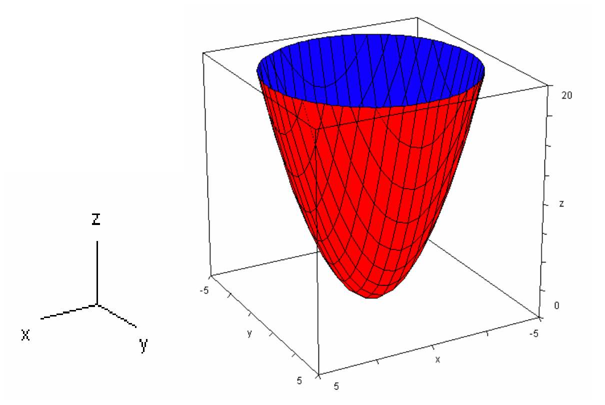

Figura 6 – Grafico della funzione $z = x^2 + y^2$

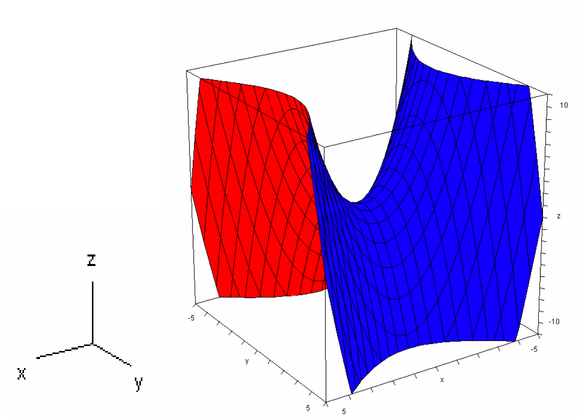

Figura 7 – Grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$

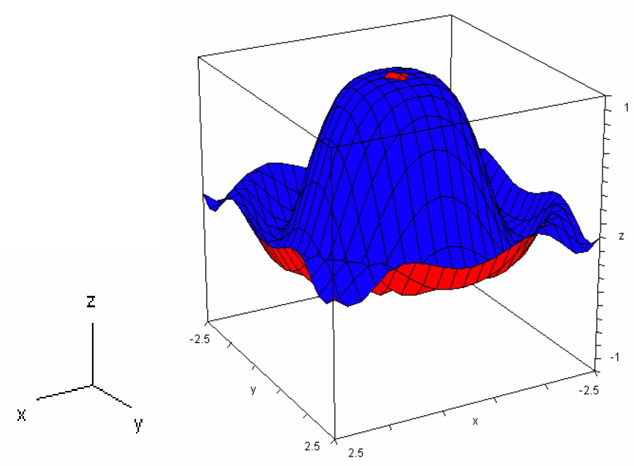

Figura 8 – Grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{sen\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)}$

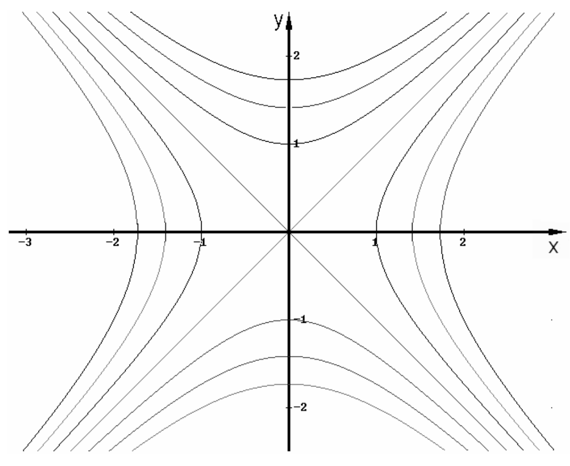

Figura 9 – Curve di livello della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$

La rappresentazione di una superficie nello spazio non è banale. Oggi con l'aiuto del computer e di opportuni programmi ciò può essere fatto molto semplicemente. In genere, per avere un'idea dell'andamento della superficie si possono utilizzare diverse tecniche:

1) grafico per punti: si disegna una griglia nel dominio e si calcolano i valori della funzione solo nei punti della griglia che poi si uniscono con dei segmenti (il programma derive utilizza questa tecnica);
2) grafici sezione: si taglia la superficie con piani paralleli ai piani *xz* e *yz* ottenendo rispettivamente delle curve del tipo $z = f(x,k)$ e $z = f(h,y)$.

3) Curve di livello: si ottengono sezionando la superficie con piani paralleli al piano xy. Si ottiene una famiglia di curve di equazione $f(x,y) = k$.

<u>ESEMPIO 11</u> – Determinare le curve di livello della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$.
Le curve di livello hanno equazione $x^2 - y^2 = k$ e sono delle iperboli equilatere. Per k = 0 la curva di livello è data delle bisettrici del primo e terzo quadrante ($y = x$) e del secondo e quarto ($y = -x$). Le curve corrispondenti a k = ±1, ±2, ±3 sono date il figura 9.

3 – Limiti delle funzioni di due variabili

DEFINIZIONE – Sia $z = f(x,y)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di accumulazione di D. Si dice che $f(x,y)$ tende al limite finito l per $P \to P_0$ (cioè per $x \to x_0$ e $y \to y_0$) se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di P_0 tale che, per ogni punto di D che cade in I, eccettuato al più P_0, si ha:

$$\left| f(x,y) - l \right| < \varepsilon$$

Si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l .$$

ESEMPIO 12 – Verificare che $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + xy^2 - y^2}{x-1} = -1$.

Si deve dimostrare che, fissato $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza $\displaystyle \left| \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + xy^2 - y^2}{x-1} - (-1) \right| < \varepsilon$ è verificata in un intorno del punto $(1,0)$.
Sviluppando il calcolo si ha:

$$\left| \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + xy^2 - y^2 + x - 1}{x-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) + y^2 (x-1)}{x-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(x-1)^3 + y^2 (x-1)}{x-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{(x-1)} \left[(x-1)^2 + y^2 \right]}{\cancel{x-1}} \right| < \varepsilon$$

La semplificazione è lecita potendo essere $x \neq 1$. In conclusione si ha $(x-1)^2 + y^2 < \varepsilon$ (il modulo può essere tolto in quanto il suo argomento è positivo o al più nullo) che è un cerchio di centro $(1,0)$ e raggio $\sqrt{\varepsilon}$ privo del bordo e quindi un intorno di $(1,0)$

◊

DEFINIZIONE – Sia $z = f(x, y)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di accumulazione di *D*. Si dice che $f(x, y)$ tende all'infinito per $P \to P_0$ se, per ogni $M > 0$ esiste un intorno *I* di P_0 tale che, per ogni punto di *D* che cade in *I*, eccettuato al più P_0, si ha:

$$|f(x, y)| > M$$

Si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \infty .$$

ESEMPIO 13 – Verificare che $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ y \to 4}} \dfrac{1}{y - x^2} = \infty$.

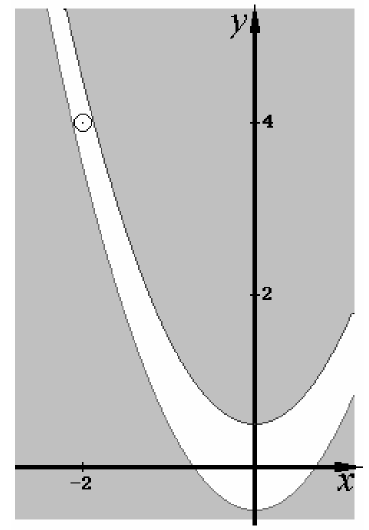

Figura 10 – Relativa all'esempio

Si deve dimostrare che, fissato $M > 0$, la disuguaglianza $\left|\dfrac{1}{y - x^2}\right| > M$ è verificata in un intorno del punto $(-2, 4)$.
Sviluppando il calcolo si ha:

$$|y - x^2| < \frac{1}{M}$$

$$-\frac{1}{M} < y - x^2 < \frac{1}{M}$$

Tale disequazione rappresenta la zona compresa tra le due parabole di equazioni $y = x^2 - \dfrac{1}{M}$ e $y = x^2 + \dfrac{1}{M}$ (nella figura 10, $M = 2$). Ci si può rendere conto facilmente che l'intorno circolare del punto $(-2, 4)$ dato da $(x+2)^2 + (y-4)^2 < \delta_M$, purchè δ_M sia opportunamente piccolo, è contenuto tra le due parabole e, verificando la disequazione, dimostra il limite.

◊

DEFINIZIONE – Sia $z = f(x, y)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$. Si dice che $f(x, y)$ tende al limite finito *l* per $P \to \infty$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno *I* dell'origine tale che, per ogni punto di *D* al di fuori di *I*, si ha:

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon$$

Si scrive

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = l \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = l .$$

ESEMPIO 14 – Verificare che $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} e^{-x^2 - y^2} = 0$.

Si deve dimostrare che, fissato $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza $\left|e^{-x^2 - y^2}\right| < \varepsilon$ è verificata al di fuori di un intorno dell'origine, ovvero per $x^2 + y^2 > K$ con *K* numero reale positivo.
Sviluppando il calcolo si ha:

$$e^{-(x^2 + y^2)} < \varepsilon$$

Essendo $x^2+y^2 \geq 0$ per ogni coppia (x,y), $e^{-(x^2+y^2)} \leq 1$ e quindi la disuguaglianza è verificata su tutto il piano se $\varepsilon \geq 1$. Se $0<\varepsilon<1$, allora

$$-(x^2+y^2) < ln\,\varepsilon$$

$$x^2+y^2 > -ln\,\varepsilon = K$$

che definisce la regione esterna alla circonferenza di centro l'origine e raggio $r=\sqrt{K}$, ciò dimostra il limite dato.

◊

DEFINIZIONE – Sia $z=f(x,y)$ una funzione definita in un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$. Si dice che $f(x,y)$ tende all'infinito per *P* che tende all'infinito se, per ogni *M* > 0 esiste un intorno *I* dell'origine tale che, per ogni punto di *D* esterno ad *I* si ha:

$$|f(x,y)| > M$$

Si scrive

$$\lim_{P\to\infty} f(P) = \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,y) = \infty\,.$$

Si possono distinguere i due casi:

$$\lim_{P\to\infty} f(P) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{P\to\infty} f(P) = -\infty$$

ESEMPIO 15 – Verificare che $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{1-x^2y^2}} = +\infty$.

Si deve dimostrare che, fissato *M* > 0, la disuguaglianza

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-x^2y^2}} > M$$

è verificata esternamente ad un intorno dell'origine, ovvero per $x^2+y^2>K$ con *K* numero reale positivo.

Per prima cosa si osservi che il dominio della funzione è la regione compresa tra le due iperboli equilatere di equazioni rispettivamente $y=-\dfrac{1}{x}$ e $y=\dfrac{1}{x}$ (in bianco nella figura 11); inoltre nel dominio risulta $0<1-x^2y^2 \leq 1$, per cui

$$\frac{x^2+y^2}{1-x^2y^2} \geq x^2+y^2$$

da cui segue che, se $x^2+y^2>K$, allora il limite è verificato.

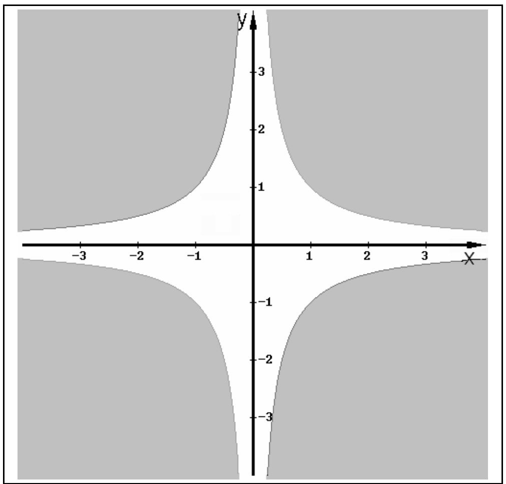

Figura 11 – Dominio della funzione dell'esempio 15

◊

OSSERVAZIONE – È intuitivo che la funzione *f*(*x*,*y*) deve ammettere lo stesso limite comunque si faccia tendere $P \to P_0$ (o $P\to\infty$), cioè comunque si faccia tendere $P \to P_0$ (o $P\to\infty$) lungo una curva γ del piano *xy* passante per P_0 (o tendente all'infinito). Se lungo una di tali curve la funzione non ammette limite per $P \to P_0$ (o $P\to\infty$) si deve concludere che non esiste $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ $\left(\lim\limits_{P\to\infty} f(P)\right)$.

ESEMPIO 16 – Dimostrare che la funzione $z = \frac{x+3y}{y+3x}$ non ammette limite per $P(x,y)$ che tende a (0,0). Infatti se si considerano i punti P delle rette $y = mx$, si ha:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+3y}{y+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+3mx}{mx+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+3m)}{\cancel{x}(m+3)} = \frac{1+3m}{m+3}.$$

Si osserva facilmente che il valore del limite dipende da m e quindi dalla direzione con cui $P \to O$. Cioè il limite non esiste.

◊

ESEMPIO 17 – Dimostrare che la funzione $z = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ non ammette limite per $P(x,y)$ che tende a ∞. Anche in questo caso, considerando i punti delle rette $y = mx$ si ha:

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+m^2\right)} = \frac{1}{1+m^2}.$$

◊

ESEMPIO 18 – Dimostrare che la funzione $z = \frac{e^x-y}{x-y+1}$ non ammette limite per $P(x,y)$ che tende a $P_0(0,1)$. In questo caso, se consideriamo in punti delle rette $y = mx+1$[ii] otteniamo:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{e^x-y}{x-y+1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-(mx+1)}{x-(mx+1)+1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-mx-1}{x-mx\cancel{-1}\cancel{+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-mx-1}{x(1-m)}.$$

Tale limite dà una forma indeterminata, ma utilizzando la regola di De L'Hopital si ricava:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-mx-1}{x(1-m)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-m}{1-m} = \frac{\cancel{1-m}}{\cancel{1-m}} = 1.$$

Ma, attenzione perché se consideriamo il limite calcolato lungo la curva $y = e^x$, si ha:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{e^x-y}{x-y+1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^x}{x-e^x+1} = 0.$$

Ciò prova che $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{e^x-y}{x-y+1}$ non esiste.

◊

ESEMPIO 19 – Dimostrare facendo tendere $P(x,y)$ all'infinito lungo una qualsiasi retta, che la funzione $z = \frac{x^2+y}{x^2+y+1}$ tende a 1, ma che non esiste $\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y}{x^2+y+1}$.

Per dimostrare che lungo una qualunque retta il limite è 1, considerando prima una generica retta non parallela all'asse y, quindi una retta di equazione $y = mx + q$; si ha

---

[ii] Si ricordi che bisogna scrivere l'equazione del fascio di rette che passa per il punto $P_0(x_0,y_0)$ e che tale equazione è data da $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+mx+q}{x^2+mx+q+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{m}{x}+\frac{q}{x^2}}{1+\frac{m}{x}+\frac{q+1}{x^2}} = 1$$

Lungo una retta parallela all'asse *y*, cioè per $x = k$; si ha:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{k^2+y}{k^2+y+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{k^2}{y}+1}{\frac{k^2+1}{y}+1} = 1.$$

Facendo però tendere $P(x,y)$ all'infinito lungo la parabola $y = -x^2$ si ha:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y}{x^2+y+1} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2-x^2}{x^2-x^2+1} = 0$$

Quindi il limite non esiste.

◊

Nel calcolo dei limiti è a volte utile passare alle coordinate polari.
La trasformazione si ha ponendo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho sen\theta \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

Le trasformazioni inverse sono date da

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

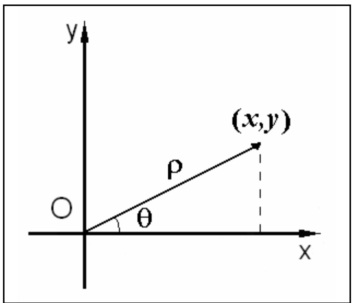

Figura 12 – Coordinate polari in due dimensioni.

ESEMPIO 20 – Calcolare il limite $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Si ha:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)^2(\rho sen\theta)^2}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho sen\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta\cdot sen^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2 sen^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta\cdot sen^2\theta}{\rho^2\left(\cos^2\theta+sen^2\theta\right)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^2\cos^2\theta\cdot sen^2\theta\right) = 0$$

◊

Come nel caso delle funzioni ad una variabile, valgono i seguenti teoremi sui limiti

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE – Se per $P \to P_0$ o per $P \to \infty$ la funzione $f(P)$ ammette limite, questo è unico

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO – Se per $P \to P_0$ la funzione $f(P)$ tende ad un limite finito $l \neq 0$, allora esiste un intorno I di P_0 tale che per ogni P che appartiene ad I, la funzione ha lo stesso segno del limite l.

TEOREMA – Se in tutti i punti di un intorno di P_0 si ha $f(P_0) \geq 0$ [$f(P_0) \leq 0$] e se $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = l$, allora $l \geq 0$ [$l \leq 0$].

TEOREMA DEL CONFRONTO – Se due funzioni $g(P)$ e $h(P)$ tendono allo stesso limite finito l per $P \to P_0$ e, in un intorno di P_0 si ha

$$g(P) \leq f(P) \leq h(P)$$

allora si ha anche $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = l$.

TEOREMA – Se, per $P \to P_0$ o per $P \to \infty$, si ha: $\lim f(P) = l_1$ e $\lim f(P) = l_2$, con l_1 e l_2 valori finiti, allora risulta:

1) $\lim\left[f(P) \pm g(P)\right] = l_1 \pm l_2$

2) $\lim\left[f(P) \cdot g(P)\right] = l_1 \cdot l_2$

3) $\lim\left[k \cdot f(P)\right] = k \cdot l_1$ con k costante reale

4) $\lim\left[f(P)\right]^n = l_1^n$

5) $\lim \sqrt[n]{f(P)} = \sqrt[n]{l_1}$, purchè, se n è pari, $l_1 > 0$

6) $\lim \dfrac{1}{f(P)} = \dfrac{1}{l_1}$, purchè $l_1 \neq 0$

7) $\lim \dfrac{f(P)}{g(P)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0$

8) $\lim\left|f(P)\right| = \left|l_1\right|$

9) Se h(z) è una funzione di una sola variabile, continua per z = l_1, si ha $\lim h\left(f(P)\right) = h\left(l_1\right)$

10) $\lim f(P) = 0$, allora $\lim \dfrac{1}{f(P)} = \infty$

11) $\lim f(P) = \infty$, allora $\lim \dfrac{1}{f(P)} = 0$

4 – Funzioni continue

DEFINIZIONE – Una funzione di due variabili reali $f(x,y)$ si dice continua in un punto $P_0(x_0,y_0)$ del suo dominio, se si ha

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

◊

Se A è un insieme di punti del piano contenuto nel dominio della funzione, $f(x,y)$ si dice continua in A se essa è continua in ogni punto di A.

Dai teoremi sui limiti e dalla definizione ora data, segue che la somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue è una funzione continua.

<u>ESEMPIO 21</u>– La funzione $f(x,y) = x$ è continua per ogni punto del piano. Lo stesso la funzione $f(x,y) = y$.

◊

Sia $f(x,y)$ una funzione continua e $P_0(x_0,y_0)$ un punto del suo dominio. Se si fissa $y = y_0$, si ottiene la funzione della sola variabile x:

$$\varphi(x) = f(x,y_0)$$

se tale funzione risulta continua in $x = x_0$, si dirà che la funzione $f(x,y)$ è continua parzialmente in $P_0(x_0,y_0)$ rispetto alla x. Analogamente, $f(x,y)$ sarà continua parzialmente in $P_0(x_0,y_0)$ rispetto alla sola variabile y, se la funzione

$$\psi(y) = f(x_0,y),$$

con $x = x_0$ fissato, è continua in $y = y_0$.

È evidente che una funzione continua è anche parzialmente continua sia rispetto a x, sia rispetto a y. Non è vero il contrario.

<u>ESEMPIO 22</u> – La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

è parzialmente continua rispetto a x e y, ma non è continua totalmente.
Infatti se fissiamo $y = 0$ (ossia ci si muove lungo l'asse x) si ha $\varphi(x) = f(x,0) = 0$ per ogni x, e quindi la funzione è continua in x; analogamente, per $x = 0$ (ossia muovendosi lungo l'asse y) si ha $\psi(y) = f(0,y) = 0$ per ogni y che è continua in y. Lungo la curva $y = x^3$ si ha invece: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}$, per cui, non esistendo il limite, la funzione non è continua.

◊

5 – Derivate parziali

DEFINIZIONE – Sia $z = f(x, y)$ una funzione in due variabili reali e sia $P_0(x_0,y_0)$ un punto interno al suo dominio D. Si consideri un interno quadrato di P_0, di lato $2h$, contenuto in D.

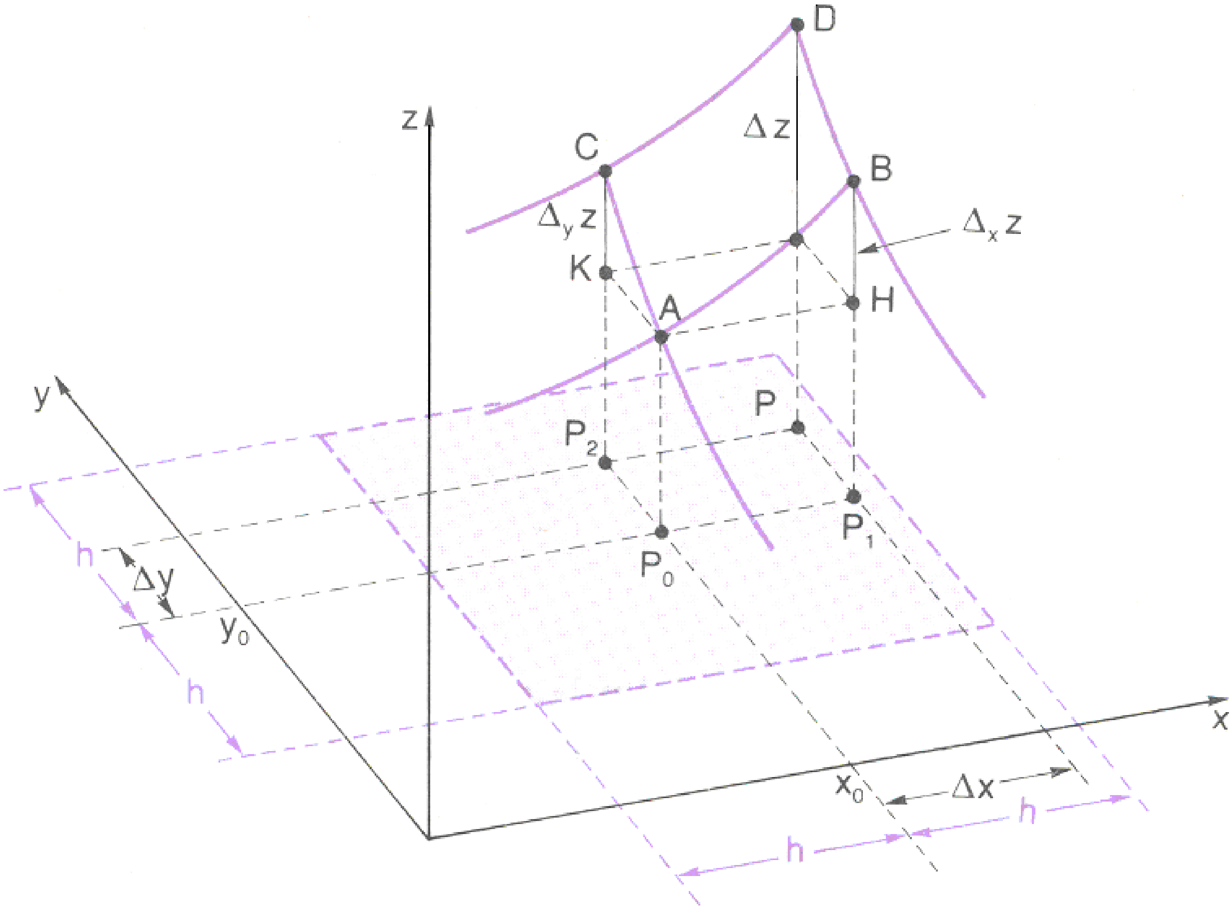

Figura 13 – Significato geometrico della derivata parziale

Se alla variabile x di dà un incremento Δx, positivo o negativo, tale che sia $|\Delta x| < h$, si ottiene un punto $P_1(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Analogamente, se si dà un incremento Δy, positivo o negativo, alla variabile y, in modo che risulti $|\Delta y| < h$, si ottiene un punto $P_2(x_0, y_0 + \Delta y) \in D$. In entrambi i casi si può quindi definire un incremento parziale di z, rispetto alla variabile x ($\Delta_x z$), o rispetto alla variabile y ($\Delta_y z$) così definiti:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Se si incrementano contemporaneamente le due variabili si ottiene il punto $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$ e si può definire l'incremento totale Δz di z :

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Si osservi che in generale

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Se in $z = f(x, y)$ fissiamo $y = y_0$, otteniamo una funzione nella sola variabile x:

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

il cui grafico, nel piano $y = y_0$, è la linea che passa per A e per B nella figura 13. Si ha pertanto:

$$\Delta_x z = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

Analogamente se fissiamo $x = x_0$, otteniamo una funzione nella sola variabile y:

$$\psi(x) = f(x_0, y)$$

il cui grafico, nel piano $x = x_0$, è la linea che passa per A e per C nella figura 13. Si ha pertanto:

$$\Delta_y z = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

Una funzione di due variabili reali $z = f(x, y)$ è totalmente continua nel punto $P(x_0, y_0)$ se e solo se

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Delta z = 0$$

Analogamente:

la funzione $z = f(x, y)$ è continua parzialmente rispetto alla variabile x, nel punto $P(x_0, y_0)$, se e solo se: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0$;

la funzione $z = f(x, y)$ è continua parzialmente rispetto alla variabile y, nel punto $P(x_0, y_0)$, se e solo se: $\lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y z = 0$.

Sia $z = f(x, y)$ una funzione di due variabili reali e $P(x_0, y_0)$ un punto interno al suo dominio, chiameremo rapporto incrementale parziale rispetto alla variabile x il rapporto:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

analogamente si definisce il rapporto incrementale parziale rispetto alla variabile y il rapporto:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Se esiste finito

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

allora la funzione $z = f(x, y)$ è parzialmente derivabile rispetto a x (ammette derivata parziale rispetto a x) in $P(x_0, y_0)$. Si scrive:

$$\left(z'_x\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \qquad f'_x(x_0, y_0)$$

Se esiste finito

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

allora la funzione $z = f(x, y)$ è parzialmente derivabile rispetto a y (ammette derivata parziale rispetto a y) in $P(x_0, y_0)$. Si scrive:

$$\left(z'_y\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \qquad f'_y(x_0, y_0)$$

Se $P(x_0, y_0)$ è un generico punto del dominio di $f(x,y)$, le derivate parziali sono a loro volta delle funzioni. I simboli $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ vengono anche chiamati operatori funzionali di derivazione parziale. Spesso si scrive: $\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\right]$ e $\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x)\right]$.

<u>ESEMPIO 23</u> – Calcolare le derivate parziali della funzione $z = f(x,y) = x^2 y + xy^2$ nel punto $P(1,-2)$.

$$f_x'(1,-2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,-2)-f(1,-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(1+\Delta x)^2(-2)+(1+\Delta x)(-2)^2\right]-\left[(1)^2(-2)+(1)(-2)^2\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[-2\left(1+2\Delta x+\Delta x^2\right)+4(1+\Delta x)\right]-[-2+4]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{-2}\cancel{-4\Delta x}-2\Delta x^2\cancel{+4}\cancel{+4\Delta x}\cancel{-2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(-2\Delta x) = 0$$

$$f_y'(1,-2) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,-2+\Delta y)-f(1,-2)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left[(1)^2(-2+\Delta y)+(1)(-2+\Delta y)^2\right]-\left[(1)^2(-2)+(1)(-2)^2\right]}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left[(-2+\Delta y)+\left(4-4\Delta y+\Delta y^2\right)\right]-2}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{-2}+\Delta y\cancel{+4}-4\Delta y+\Delta y^2\cancel{-2}}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^2-3\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}(\Delta y-3) = -3$$

◊

Se $f(x,y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla variabile *x* nel punto $P(x_0, y_0)$, in tale punto risulta anche parzialmente continua rispetto a *x*.
Se $f(x,y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla variabile *y* nel punto $P(x_0, y_0)$, in tale punto risulta anche parzialmente continua rispetto a *y*.
Una funzione è parzialmente continua rispetto ad *x* e rispetto ad *y*, potrebbe non essere continua.

<u>ESEMPIO 24</u> – Verificare che la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

è parzialmente derivabile sia rispetto alla variabile *x*, sia rispetto alla variabile *y*, ma non è totalmente continua.
Si ha

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

e

$$f_y'(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

ma

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

si è scelta la direzione generica $y = mx$ e si vede che il limite dipende dalla direzione, quindi non esiste.

◊

Riguardo alle derivate parziali della funzione $z = f(x, y)$ valgono le seguenti proprietà.

La funzione $z = f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto $P(x_0, y_0)$ se e soltanto se la funzione $\varphi(x) = f(x, y_0)$ è derivabile per $x = x_0$. In altri termini, la derivata parziale rispetto ad x si effettua derivando rispetto a x, considerando y come costante. Si ha $f_x'(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$.

La funzione $z = f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla variabile y nel punto $P(x_0, y_0)$ se e soltanto se la funzione $\psi(y) = f(x_0, y)$ è derivabile per $y = y_0$. In altri termini, la derivata parziale rispetto ad y si effettua derivando rispetto a y, considerando x come costante. Si ha $f_y'(x_0, y_0) = \psi'(y_0)$.

<u>ESEMPIO 25</u> – Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^3 + \ln y .$$

Si ha

$$f_x'(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + \ln y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln y) = 2x^2 + 0 = 2x^2$$

$$f_y'(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + \ln y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\ln y) = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

◊

<u>ESEMPIO 26</u> – Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = y^2 \cos x .$$

Si ha

$$f_x'(x, y) = -y^2 \operatorname{sen} x \,,\ f_y'(x, y) = 2y \cos x$$

◊

Sia $z = f(x, y)$ derivabile parzialmente in $P(x_0, y_0)$ e sia $z_0 = f(x_0, y_0)$. Si dimostra che il piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ ha equazione:

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

<u>ESEMPIO 27</u> – Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$$

nel punto $P_0(4,1)$.

Si ha $z_0 = f(P_0) = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$; $f_x'(x, y) = \frac{1}{2y\sqrt{x}}$ e $f_y'(x, y) = -\frac{\sqrt{x}}{y^2}$ e quindi $f_x'(4,1) = \frac{1}{4}$ e

$f_y'(4,1) = -2$. Si ha quindi: $z - 2 = \frac{1}{4}(x-4) + -2(y-1)$ da cui segue $z = \frac{1}{4}x - 2y + 3$.

◊

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili, derivabile parzialmente; le funzioni $f_x'(x,y)$ e $f_y'(x,y)$ possono essere ulteriormente derivabili. Si parla quindi di derivate parziali seconde (o del secondo ordine) della funzione e si indicano nei seguenti modi:

derivata seconda rispetto ad *x*: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}''(x,y) = z_{xx}''$

derivata seconda mista rispetto ad *x* e rispetto ad *y*: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x,y) = z_{yx}''$

derivata seconda mista rispetto ad *y* e rispetto ad *x*: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x,y) = z_{xy}''$

derivata seconda rispetto ad *y*: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}''(x,y) = z_{yy}''$

<u>ESEMPIO 28</u> – Calcolare le derivate parziali seconde della funzione

$$f(x,y) = x^4 y - 2x^3 y^2.$$

Si ha: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y - 6x^2 y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 - 4x^3 y$ e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x^3 y - 6x^2 y^2\right] = 12x^2 y - 12xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[4x^3 y - 6x^2 y^2\right] = 4x^3 - 12x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4 - 4x^3 y\right] = 4x^3 - 12x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^4 - 4x^3 y\right] = -4x^3.$$

Si noti che $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

◊

Vale il seguente teorema:

TEOREMA DI SCHWARZ – Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto interno al dominio di una funzione $f(x,y)$. Se in un intorno di P_0 sono definite le derivate seconde miste f_{xy}'' e f_{yx}'' e se in P_0 sono entrambi continue, allora si ha:

$$f_{xy}''(P_0) = f_{yx}''(P_0)$$

ESEMPIO 29 – Verificare se vale il teorema di Schwarz per la funzione:

$$f(x,y) = x^y$$

Per $x > 0$ risulta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial x^y}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[yx^{y-1}\right] = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial x^y}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^y \ln x\right] = yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x} = x^{y-1}(y\ln x + 1)$$

Risulta quindi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

◊

ESEMPIO 30 – Consideriamo la funzione[iii]

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & se \quad x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & se \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Mostreremo che non vale il teorema di Schwarz.

Calcoliamo le derivate parziali; per x e y non entrambi nulli: $f'_x(x,y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$. Per calcolare $f'_x(0,0)$ occorre applicare la definizione: $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x} = 0$;

perciò $f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & se \quad x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & se \quad x = y = 0 \end{cases}$.

Analogamente si ha: $f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5}{(x^2+y^2)^2} & se \quad x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & se \quad x = y = 0 \end{cases}$.

Calcoliamo ora le derivate miste del secondo ordine. I tutti i punti diversi dall'origine si ha:

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Per calcolare $f''_{xy}(0,0)$ e $f''_{yx}(0,0)$ occorre ricorrere alla definizione:

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{-\dfrac{\Delta y^5}{\Delta y^4} - 0}{\Delta y} = -1$$

[iii] Controesempio dovuto a Giuseppe Peano (1858-1932)

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(0,\Delta y) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x^5}{\Delta x^4} - 0}{\Delta x} = 1.$$

Si ha quindi che $f''_{xy}(0,0)$ $\quad$ $f''_{yx}(0,0)$. Questa conclusione non contraddice il teorema di Schwarz in quanto, non è difficile dimostrarlo, le derivate seconde miste non sono continue nell'origine.

◊

Le considerazioni fatte per introdurre le derivate del secondo ordine possono essere estese alle derivate di ordine superiore.

Si può estendere anche il teorema di Schwarz:

<u>TEOREMA</u> – Due derivate parziali (dello stesso ordine) di una funzione $f(x,y)$, continue in un aperto A, coincidono in ogni punto di A, se sono calcolate applicando a $f(x,y)$ lo stesso numero di volte l'operatore $\frac{\partial}{\partial x}$ e lo stesso numero di volte l'operatore $\frac{\partial}{\partial y}$. Per le derivate del terzo è quindi per esempio: $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

<u>ESEMPIO 31</u> – Calcolare le derivate parziali terze miste della funzione

$$f(x,y) = x^4 y - 2x^3 y^2.$$

Nell'esempio 28 erano state calcolate le derivate seconde: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y - 12xy^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x^3 - 12x^2 y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x^3$.

Deriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ rispetto a y: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[12x^2 y - 12xy^2\right] = 12x^2 - 24xy$.

Deriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ rispetto a y: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[4x^3 - 12x^2 y\right] = -12x^2$.

Deriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ rispetto a x: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[4x^3 - 12x^2 y\right] = 12x^2 - 24xy$.

Deriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ rispetto a x: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-4x^3\right] = -12x^2$.

Si vede quindi facilmente che la prima e la terza sono uguali e possiamo scriverle $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, allo stesso modo sono uguali la seconda e la quarta e la scriviamo $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

◊

Sia $z = f(x,y)$ una funzione derivabile parzialmente e sia *x* e *y* funzioni derivabili di una variabile *t*:

$$x = \varphi(t) \qquad \text{e} \qquad y = \psi(t)$$

allora $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ è una funzione derivabile di *t* e si ha:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

<u>ESEMPIO 32</u> – Calcolare la derivata della funzione: $f(x,y) = e^{3x+2y}$ con $x = cost$ e $y = t^2$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{3x+2y}\right]\frac{d}{dt}[cos\,t] + \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{3x+2y}\right]\frac{d}{dt}\left[t^2\right] = e^{3x+2y}\cdot 3\cdot(-sen\,t) + e^{3x+2y}\cdot 2\cdot(2t) =$$

$$= e^{3x+2y}\left[-3sen\,t + 4t\right] = e^{3cos\,t+2t^2}\left[-3sen\,t + 4t\right]$$

◊

Oltre alle derivate parziali di una funzione $z = f(x,y)$ si può definire la ***derivata in una direzione*** qualunque $l = P_0P$ o anche ***derivata direzionale***.
Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{PP_0}$$

Si dimostra che se α è l'angolo che la direzione *l* forma con la direzione positiva dell'asse *x*, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}cos\,\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}sen\alpha.$$

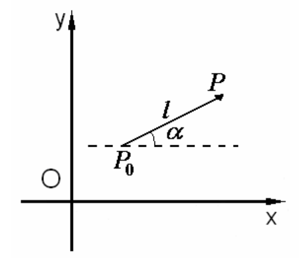

Figura 14 – Derivata direzionale

<u>ESEMPIO 33</u> – Calcolare la derivata direzionale della funzione: $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ nel punto $P_0(1,0)$ e in una direzione che forma un angolo di 120° con il verso positivo dell'asse *x*.
Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6y \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = 0$$

Inoltre $cos\,\alpha = cos120° = -\frac{1}{2}$ e $sen\alpha = sen120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si ha quindi: $\frac{\partial z}{\partial l} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

◊

Si chiama ***gradiente*** di una funzione $z = f(x,y)$ il vettore che ha come componenti le derivate parziali:

$$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono rispettivamente i versori dell'asse *x* e dell'asse *y*.
Il gradiente si scrive anche con il simbolo ∇ (si legge NABLA o anche ATLED – che sta per DELTA letto al contrario)

$$\overrightarrow{\nabla f} = grad(f).$$

Si dimostra che, se non è nullo, il gradiente è un vettore che indica la direzione di massima pendenza del grafico della funzione.

ESEMPIO 34 – Calcolare il gradiente della funzione: $f(x,y) = x^2 y$ nel punto $P_0(1,1)$ e rappresentarlo graficamente.

Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = 1$$

$$grad(f) = 2\vec{i} + \vec{j}\ .$$

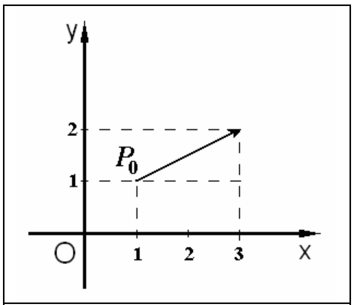

Figura 15 – Rappresentazione relativa all'esempio 34.

◊

6 – Massimi e minimi

Sia $z = f(x, y)$ una funzione definita in un insieme $A \subset$ D(f) $\subset \mathbb{R}^2$. Diremo che un punto $P_0(x_0, y_0) \in A$ è un punto di massimo assoluto per la funzione *f* nell'insieme *A*, se, comunque si scelga $P(x, y) \in A$, si ha

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

$M = f(x_0, y_0)$ è detto massimo assoluto di *f* in *A*.
Se invece, comunque si scelga $P(x, y) \in A$, si ha che

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

diremo che P_0 è un punto di minimo assoluto e $m = f(x_0, y_0)$ è il minimo assoluto di f in *A*.

TEOREMA DI WEIERSTRASS – Se la funzione $f(x, y)$ è continua nell'insieme *A* chiuso è limitato, allora ammette in *A* il massimo e il minimo assoluto.

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili reali definita in un insieme $A \subset$ D(f) $\subset \mathbb{R}^2$. Diremo che $f(x, y)$ un minimo relativo nel punto $P_0(x_0, y_0) \in A$ se esiste un intorno *I* di P_0 tale che, per ogni punto $P(x, y) \in A$, contenuto in *I*, distinto da P_0 si abbia: $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.
Se vale solo il segno >, allora è un minimo relativo proprio.
Se invece, per ogni punto $P(x, y) \in A$, contenuto in *I*, distinto da P_0 si ha: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, si avrà un massimo relativo (proprio se è solo <).

I punti di massimo e di minimo relativi o assoluti, vengono detti punti stremanti e si dice che in tali punti la funzione ha un estremo.

<u>ESEMPIO 35</u> – La funzione $f(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$ ha un massimo relativo proprio nell'origine. Si dimostra infatti che, essendo $f(0,0) = 1$, la disuguaglianza $f(x, y) < 1$ è verificata in ogni punto di un intorno di $(0,0)$ diverso da $(0,0)$.

Si ha: $\left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 < 1$, ovvero $-1 < x^2 + y^2 - 1 < 1$ da cui segue: $0 < x^2 + y^2 < 2$ che è appunto un intorno dell'origine (origine esclusa).

◊

TEOREMA – Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili reali definita in un insieme definita in un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ e sia $P_0(x_0, y_0) \in A$ un punto di massimo o di minimo relativo. Allora, se $f(x, y)$ è parzialmente derivabile in P_0, le derivate parziali di *f* sono nulle in P_0; si ha cioè:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$
$$f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

<u>ESEMPIO 36</u> – Consideriamo di nuovo la funzione $f(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$ dell'esempio 35. Come si è dimostrato, essa ha un massimo relativo nell'origine. Si ha inoltre:

$$f_x'(x,y)=4x\left(x^2+y^2-1\right)$$
$$f_y'(x,y)=4y\left(x^2+y^2-1\right)$$

e quindi: $f_x'(x_0,y_0)=0$ e $f_y'(x_0,y_0)=0$.

Si noti che le derivate parziali prime sono nulle anche nei punti della circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$ e che, in ogni punto di tale circonferenza risulta $f(x,y)=0$. Poiché per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si ha $f(x,y)\geq 0$, i punti di tale circonferenza risultano punti di minimo assoluto (vedi figura 16).

◊

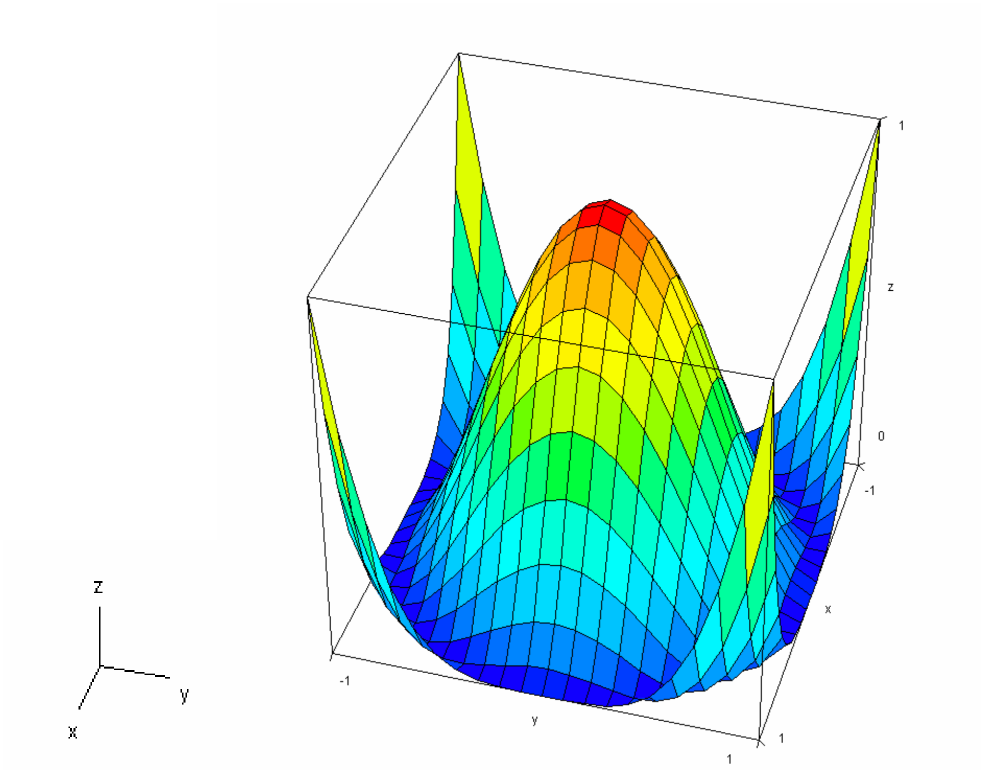

Figura 16 – Rappresentazione grafica della funzione $f(x,y)=\left(x^2+y^2-1\right)^2$ relativa agli esempi 35 e 36.

ATTENZIONE – L'annullarsi delle derivate parziali prime in un punto è una condizione necessaria, ma non sufficiente. Le derivate parziali possono essere nulle in un punto, ma questo potrebbe non essere né massimo né minimo relativo.

<u>ESEMPIO 37</u> – Consideriamo la funzione $f(x,y)=x^2-y^2$. Le sue derivate parziali prime sono:

$$f_x'(x,y)=2x \qquad \text{e} \qquad f_y'(x,y)=-2y$$

e si annullano nell'origine $O=(0,0)$: $f_x'(0,0)=0$ e $f_y'(0,0)=0$. L'origine però non è né punto di massimo, né punto di minimo relativo. Infatti risulta: $f(0,0)=0$, ma in ogni intorno dell'origine si ha: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ e quindi in alcuni punti risulta $f(x,y)>f(0,0)=0$, in altri $f(x,y)<f(0,0)=0$.

◊

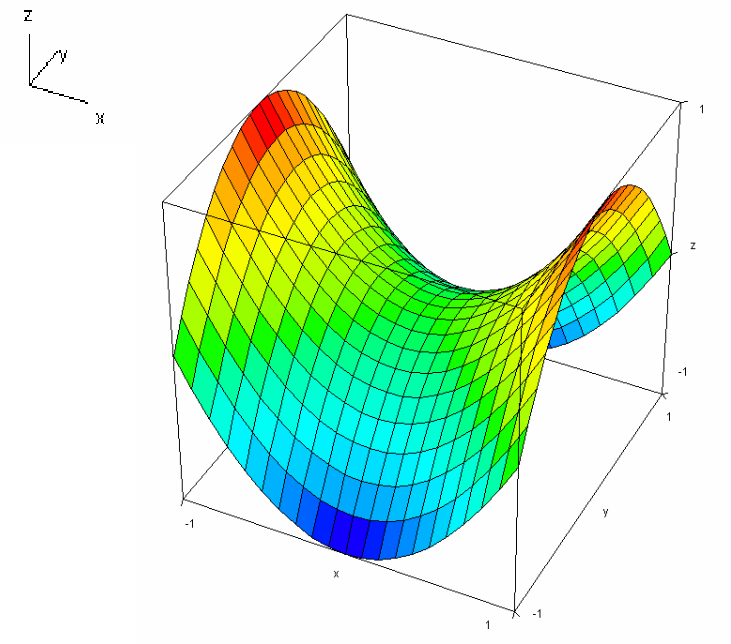

Figura 17 – Rappresentazione grafica della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ relativa all'esempio 37.

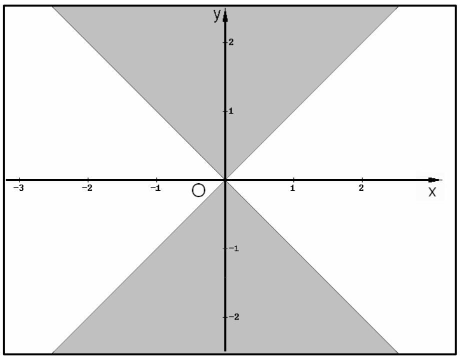

Figura 18 – In grigio i punti del piano in cui $f(x,y) < 0$, in bianco quelli in cui $f(x,y) > 0$

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita e parzialmente derivabile in un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$.
Se in un punto $P_0(x_0, y_0) \in A$ si annullano entrambe le derivate parziali prime, ossia se

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

si dice che $P_0(x_0, y_0)$ è un ***punto stazionario*** per $f(x,y)$.
Per determinare i punti stazionari di una funzione $f(x,y)$ occorre quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Si osservi che i punti di massimo e di minimo relativi interni al dominio sono punti stazionari.
I punti stazionari che non sono né punti di massimo, né punti di minimo relativo sono detti ***punti di sella***. Nell'esempio 37 l'origine è un punto di sella.

<u>ESEMPIO 38</u> – Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 - 8y^3 + 6xy$.
Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x'(x,y) = 3x^2 + 6y \qquad \text{e} \qquad f_y'(x,y) = -24y^2 + 6x$$

e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ -24y^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x^2 \\ -24 \cdot \dfrac{1}{4}x^4 + 6x = 0 \end{cases}$ risolvendo la seconda equazione si ottiene $x = 0$ e $x = 1$ da ciò segue che i punti stazionari per la funzione in esame sono: $O = (0,0)$ e $P = \left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

◊

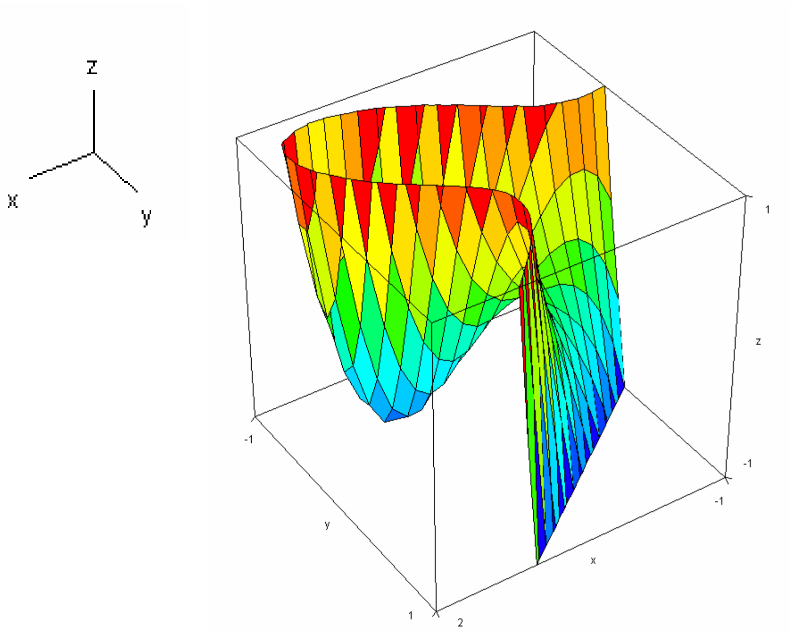

Figura 19 – Rappresentazione grafica della funzione $f(x,y) = x^3 - 8y^3 + 6xy$ relativa all'esempio 38.

Si chiama ***hessiano*** di una funzione $f(x,y)$ dotata di derivate parziali del secondo ordine, la funzione delle variabili x e y, così definita:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}''(x,y) & f_{xy}''(x,y) \\ f_{yx}''(x,y) & f_{yy}''(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}''(x,y) f_{yy}''(x,y) - \left[f_{xy}''(x,y) \right]^2 .$$

<u>TEOREMA</u> – Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili definita e derivabile parzialmente fino al secondo ordine un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$. Sia $P_0(x_0, y_0) \in A$ un punto stazionario per $f(x,y)$.

1) Se risulta $H(x_0, y_0) > 0$, allora:

– se $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, P_0 è un punto di massimo relativo[iv]
– se $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, P_0 è un punto di minimo relativo

2) Se risulta $H(x_0, y_0) < 0$, allora P_0 è un punto di sella

3) Se risulta $H(x_0, y_0) = 0$, non si può affermare nulla sulla natura di P_0 che può essere sia un massimo, sia un minimo, sia un punto di sella.

ESEMPIO 39 – Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 - 8y^3 + 6xy$ dell'esempio 38.
Ricordiamo che:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 6y \qquad \text{e} \qquad f'_y(x, y) = -24y^2 + 6x$$

e calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 6, \qquad f''_{yy}(x, y) = -48y.$$

Otteniamo quindi:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -48y \end{vmatrix} = -288xy - 36$$

I punti stazionari sono: $O = (0,0)$ e $P = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$; risulta pertanto:

$H(0,0) = -36 < 0$, quindi l'origine è un punto di sella,

$H\left(1, -\frac{1}{2}\right) = 144 - 36 = 108 > 0$ e $f''_{xx}\left(1, -\frac{1}{2}\right) = 6 > 0$, quindi il punto P è un minimo. Il valore del minimo lo ricaviamo calcolando $f(P) = f\left(1, -\frac{1}{2}\right) = -1$

◊

ESEMPIO 40 – Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$ dell'esempio 36.
Ricordiamo che:

$$f'_x(x, y) = 4x\left(x^2 + y^2 - 1\right) \qquad \text{e} \qquad f'_y(x, y) = 4y\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

e calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$f''_{xx}(x, y) = 4\left(x^2 + y^2 - 1\right) + 8x^2, \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 8xy, \qquad f''_{yy}(x, y) = 4\left(x^2 + y^2 - 1\right) + 8y^2.$$

[iv] Se risulta $H(x_0, y_0) > 0$, allora $f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$ e quindi $f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) > \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 \geq 0$. Da ciò segue che $f''_{xx}(x_0, y_0)$ e $f''_{yy}(x_0, y_0)$ hanno lo stesso segno.

Nell'origine abbiamo: $f''_{xx}(0,0) = -4$, $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0$, $f''_{yy}(x,y) = -4$ e quindi $H(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$ ed essendo $f''_{xx}(0,0) = -4 < 0$ nell'origine c'è un punto di massimo relativo.
Nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si ha: $f''_{xx}(x,y) = 8x^2$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 8xy$, $f''_{yy}(x,y) = 8y^2$ e quindi $H(x,y) = \begin{vmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{vmatrix} = 64x^2y^2 - 64x^2y^2 = 0$. Il teorema non ci permette quindi di stabilire la natura di tali punti, ma le considerazioni fatte nell'esempio 36 ci consentono di dire che tali punti sono punti di minimo assoluto.

◊

Più in generale, quando $H(x_0, y_0) = 0$, con $P_0(x_0, y_0)$ punto stazionario per *f*, allora si studia il segno della funzione:

$$g(x,y) = f(x,y) - f(x_0, y_0).$$

Se risulta $g(x,y) > 0$ in un intorno di $P_0(x_0, y_0)$ allora $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di minimo; infatti $g(x,y) > 0$ implica $f(x,y) - f(x_0, y_0) > 0$ da cui $f(x,y) > f(x_0, y_0)$.
Se risulta $g(x,y) < 0$ in un intorno di $P_0(x_0, y_0)$ allora $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di massimo; infatti $g(x,y) < 0$ implica $f(x,y) - f(x_0, y_0) < 0$ da cui $f(x,y) < f(x_0, y_0)$.
Se risulta la funzione $g(x,y)$ cambia di segno in un intorno di $P_0(x_0, y_0)$ allora $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di sella.

Spesso la ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione a due variabili va fatta con le variabili che non sono indipendenti, ma legate tra loro da certe condizioni (espresse mediante delle equazioni).

Sia $f(x,y)$ una funzione a due variabili definita in un dominio *D* e supponiamo che tra le variabili esista la condizione $g(x,y) = 0$ essendo la funzione $g(x,y)$ definita nel dominio *D*. L'equazione $g(x,y) = 0$ si chiama ***equazione del vincolo***. L'equazione $g(x,y) = 0$ sul piano cartesiano *xOy* rappresenta una curva γ. Determinare quindi il massimo e il minimo $f(x,y)$ con $(x,y) \in \gamma$, porta al problema dei ***massimi e minimi vincolati*** (o ***condizionati***).
Si tratta di determinare gli estremi di una funzione $f(x,y)$ non su tutto il dominio *D*, ma limitatamente al sottoinsieme γ.

Se la funzione $g(x,y) = 0$ può essere esplicitata[v] rispetto a *x* o a *y*, sostituendo nella $f(x,y)$ si

[v] A tal fine esiste il seguente teorema del DINI: Sia $f(x,y)$ una funzione con derivate parziali prime continue in un intorno circolare di un punto $P_0(x_0, y_0)$ del suo dominio in cui si abbia $f(x_0, y_0) = 0$ e $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esiste una ed una sola funzione $y = \varphi(x)$, definita in un intorno *I* di x_0 tale che, per ogni x *I* si abbia $f(x, \varphi(x)) = 0$ e

ottiene una funzione in una sola variabile della quale si devono trovare i massimi e i minimi.

ESEMPIO 41 – Determinare gli estremi relativi della funzione $z = f(x, y) = xy$ che soddisfano la condizione $g(x, y) = 2x + 3y - 5 = 0$.

L'equazione del vincolo può essere esplicitata ottenendo $y = \frac{5-2x}{3}$ che sostituito nella f dà: $z = x\frac{5-2x}{3} = \frac{5x-2x^2}{3}$. Essendo questa una parabola con la concavità rivolta verso il basso, ha un massimo nel vertice $V\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{24}\right)$; il punto $V\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ è quindi un massimo e in esso la funzione vale $z = f\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$.

◊

Un altro metodo per determinare i massimi e i minimi vincolati è il cosiddetto ***metodo dei moltiplicatori di Lagrange***.

Sia $z = f(x, y)$ una funzione in due variabili definita in un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ e $g(x, y) = 0$, anch'essa definita in *A*, un vincolo. Consideriamo la funzione ausiliaria (detta ***funzione lagrangiana*** o semplicemente ***lagrangiana***)

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

dove λ è un numero reale detto ***moltiplicatore di Lagrange***.

Se $P_0(x_0,y_0)$ è un punto di massimo o di minimo relativo vincolato, allora esiste ed è unico il valore λ_0, tale che (x_0,y_0,λ_0) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Se $P_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ è soluzione del sistema $\vec{\nabla} L = 0$, allora considerata la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & g'_x(P) & g'_y(P) \\ g'_x(P) & L''_{xx}(P) & L''_{xy}(P) \\ g'_y(P) & L''_{yx}(P) & L''_{yy}(P) \end{pmatrix} =$$

$y_0 = \varphi(x_0)$. Inoltre $y = \varphi(x)$ è derivabile per ogni $x \quad I$ e si ha: $y' = \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}$. Ovviamente se risulta $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ si potrà determinare una funzione $x = \psi(y)$.

$$= \begin{pmatrix} 0 & g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & f''_{xx}(x_0,y_0)+\lambda_0 g''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0)+\lambda_0 g''_{xy}(x_0,y_0) \\ g'_y(x_0,y_0) & f''_{yx}(x_0,y_0)+\lambda_0 g''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)+\lambda_0 g''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

se det(D) > 0, allora P_0 è un punto di massimo relativo vincolato;
se det(D) < 0 allora P_0 è un punto di minimo relativo vincolato.
Nulla si può affermare se det(D) = 0.

<u>ESEMPIO 42</u> – Determinare i punti di estremo vincolato per la funzione $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ sotto la condizione $g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

La langangiana si scrive: $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x+y-1)$, quindi: $L'_x = 2x+\lambda$, $L'_y = 2y+\lambda$ e $L'_\lambda = x+y-1$. Si ha il sistema:

$\begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} \lambda=-2x \\ 2y-2x=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} \lambda=-2x \\ y=x \\ x+x-1=0 \end{cases}$. Si ha quindi la soluzione $\begin{cases} \lambda=-1 \\ y=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$. Calcoliamo quindi le derivate parziali seconde della lagrangiana e le derivate parziali prime della g per poter scrivere la matrice D. Si ottiene: $L''_{xx} = 2$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = 2$, $g'_x = 1$, $g'_y = 1$ da cui segue:

$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e, facilmente det(D) = –4 che, essendo negativo, per il teorema enunciato sopra ci consente di dire che nel punto $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ c'è un minimo e che la funzione vale $\frac{1}{2}$.

◊

Dopo l'analisi dei massimi e dei minimi relativi liberi e dei massimi e dei minimi relativi vincolati, è possibile considerare la determinazione dei massimi e dei minimi assoluti di una funzione di due variabili reali in insiemi chiusi e limitati. Si ricordi che per il teorema di Weierstrass ricordato più sopra, se la funzione è continua, questi esistono.

Per la ricerca dei massimi e dei minimi assoluti di una funzione $f(x,y)$ in un insieme chiuso $A \subset \mathbb{R}^2$ di cui l'equazione $g(x,y)=0$ rappresenta il bordo[vi] si devono esaminare:

1) i punti di massimo e di minimo relativo interni ad A
2) i punti di massimo e di minimo relativo appartenenti alla frontiera di A
3) i punti in cui la funzione non è derivabile

I massimi e i minimi di cui al punto 1) vanno determinati utilizzando il teorema di pag. 25; quelli di cui al punto 2) con le tecniche illustrate alle pagg. 27 e 28 (sostituzione e moltiplicatori di Lagrange). Tutti i valori ottenuti vanno confrontati tra di loro e con i valori assunti nei punti isolati. Il mas-

[vi] Non necessariamente il bordo del dominio deve essere dato da un'unica funzione, anzi, in genere esso è costituito da più funzioni.

simo assoluto si avrà nel punto in cui la funzione assume il più grande dei valori ottenuti, ovviamente il minimo nel punto in cui la funzione assume il più piccolo valore.

<u>ESEMPIO 43</u> – Determinare i massimi e i minimi assoluti della funzione $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ nella regione A definita da: $x^2 + y^2 - 2x - 8 \le 0$.
La regione in questione è il cerchio di centro il punto (1,0) e raggio 3.
Per prima cosa determiniamo i punti singolari risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$, da cui si ricava $O(0,0)$. Calcolando le derivate seconde e quindi l'hessiano si dimostra che l'origine è un punto di minimo e che $f(0,0) = 0$.
Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si dimostra che il punto $P_1(-2,0)$ è un minimo vincolato con $f(-2,0) = 4$ e che il punto $P_2(4,0)$ è un massimo vincolato con $f(4,0) = 16$. Non essendoci punti isolati si conclude che la funzione, nel dominio assegnato, ha un minimo assoluto in $O(0,0)$ e un massimo assoluto $P_2(4,0)$ e che la funzione è limitata essendo $0 \le f(x, y) \le 16$ per ogni $(x, y) \in A$.

◊

7 – Differenziale di una funzione in due variabili

Sia $z = f(x, y)$ una funzione di due variabili parzialmente derivabile nel punto $P_0(x_0, y_0)$. Si chiama ***differenziale totale*** di $f(x, y)$ in P_0, e si indica con *dz*, oppure *df*, o $df(x_0, y_0)$, l'espressione:

$$f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y$$

Se applichiamo la definizione alle funzioni $g(x, y) = x$ e $h(x, y) = y$ otteniamo: $dg = dx = \Delta x$ e $dh = dy = \Delta y$. Scriveremo quindi il differenziane totale della funzione $f(x, y)$ nella forma:

$$df(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy .$$

ESEMPIO 44 – Scrivere il differenziale totale della funzione $f(x, y) = xy$ nel punto $P_0(2,-1)$ e in un generico punto $P(x, y)$.
Si ha:
$f_x'(x, y) = y$ e quindi $f_x'(2,-1) = -1$
$f_y'(x, y) = x$ e quindi $f_y'(2,-1) = 2$.
Si ha: $df(2,-1) = -dx + 2dy$. Nel generico punto *P* si ha: $df(x, y) = -yx + xdy$.

◊

ESEMPIO 45 – Scrivere il differenziale totale della funzione $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ e calcolarne il valore nell'origine.
Si ha: $f_x'(x, y) = \frac{2\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x}}$, $f_y'(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ e quindi:

$$df(x, y) = \frac{2\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x}}dx + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{y^2}}dy .$$

Si vede facilmente che nell'origine le derivate parziali perdono di significato, ma si dimostra che: $f_x'(0,0) = 0$ e che $f_y'(0,0) = 0$. Si ponga infatti $\varphi(x) = f(x,0)$ e $\psi(y) = f(0, y)$ e si utilizzi la definizione di derivata. Per il differenziale nell'origine si ha quindi: $df(0,0) = 0$.

◊

DEFINIZIONE – Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili, parzialmente derivabile nel punto $P_0(x_0, y_0)$ interno al suo dominio. Diremo che $f(x, y)$ è ***differenziabile*** in P_0, se la funzione di Δx e Δy così definita:

$$\Delta f - df = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \left[f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y \right]$$

risulta, per $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, infinitesima di ordine superiore rispetto a $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, ossia:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

ESEMPIO 46 – La funzione $f(x,y) = xy$ vista nell'esempio 44 è differenziabile nel punto $P_0(2,-1)$.

Si ha infatti:

$$\Delta f = f(2+\Delta x, -1+\Delta y) - f(2,-1) = (2+\Delta x)(-1+\Delta y) - 2(-1) = -\Delta x + 2\Delta y + \Delta x \Delta y$$

e, come vista prima

$$df = -\Delta x + 2\Delta y .$$

Risulta pertanto:

$$\Delta f - df = -\Delta x + 2\Delta y + \Delta x \Delta y - [-\Delta x + 2\Delta y] = \Delta x \Delta y .$$

Bisogna ora dimostrare che $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$. Sostituendo $\Delta x = \rho \cos\theta$ e $\Delta y = \rho sen\theta$, si ha: $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho \cos\theta \cdot \rho sen\theta}{\sqrt{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 sen^2\theta}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}} \cos\theta sen\theta}{\cancel{\rho}} = 0$.

◊

Valgono i seguenti teoremi sulle funzioni differenziabili:

1) Se la funzione $f(x,y)$ è differenziabile nel punto $P_0(x_0,y_0)$, allora in esso è totalmente continua.
2) Se le derivate parziali di $f(x,y)$ sono continue in un intorno di $P_0(x_0,y_0)$, allora $f(x,y)$ è differenziabile in tale punto.

In base a quanto detto si ha $\Delta f \simeq df$ e quindi si può scrivere:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \simeq f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

o anche

(4) $$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \simeq f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Tali formule posso essere utilizzate per calcolare valori approssimati di una funzione $f(x,y)$, differenziabile in un punto $P_0(x_0,y_0)$, della quale si sappiano calcolare le derivate parziali prime in $P_0(x_0,y_0)$.

Sia $f(x,y)$ una funzione differenziabile in un punto $P_0(x_0,y_0)$ del suo dominio, definita in un intorno I di tale punto. Sia $P(x,y)$ un generico punto di tale intorno. Poniamo:

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x \\ y - y_0 = \Delta y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \Delta x \\ y = y_0 + \Delta y \end{cases}.$$

Si ha: $f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ da cui segue:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right].$$

Essendo inoltre $\Delta f \simeq df$ si ha la (4).

Geometricamente il differenziale totale è il valore nel $P(x, y)$ del piano tangente alla curva di e-quazione $z = f(x, y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ (vedi figura 20). Si ricordi che, se la funzione $f(x, y)$ è derivabile parzialmente nel punto $P_0(x_0, y_0)$, allora l'equazione del piano tangente alla curva $z = f(x, y)$ in P_0 è data da: $z = z_0 + f_x^{'}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y^{'}(x_0, y_0)(x - x_0)$.

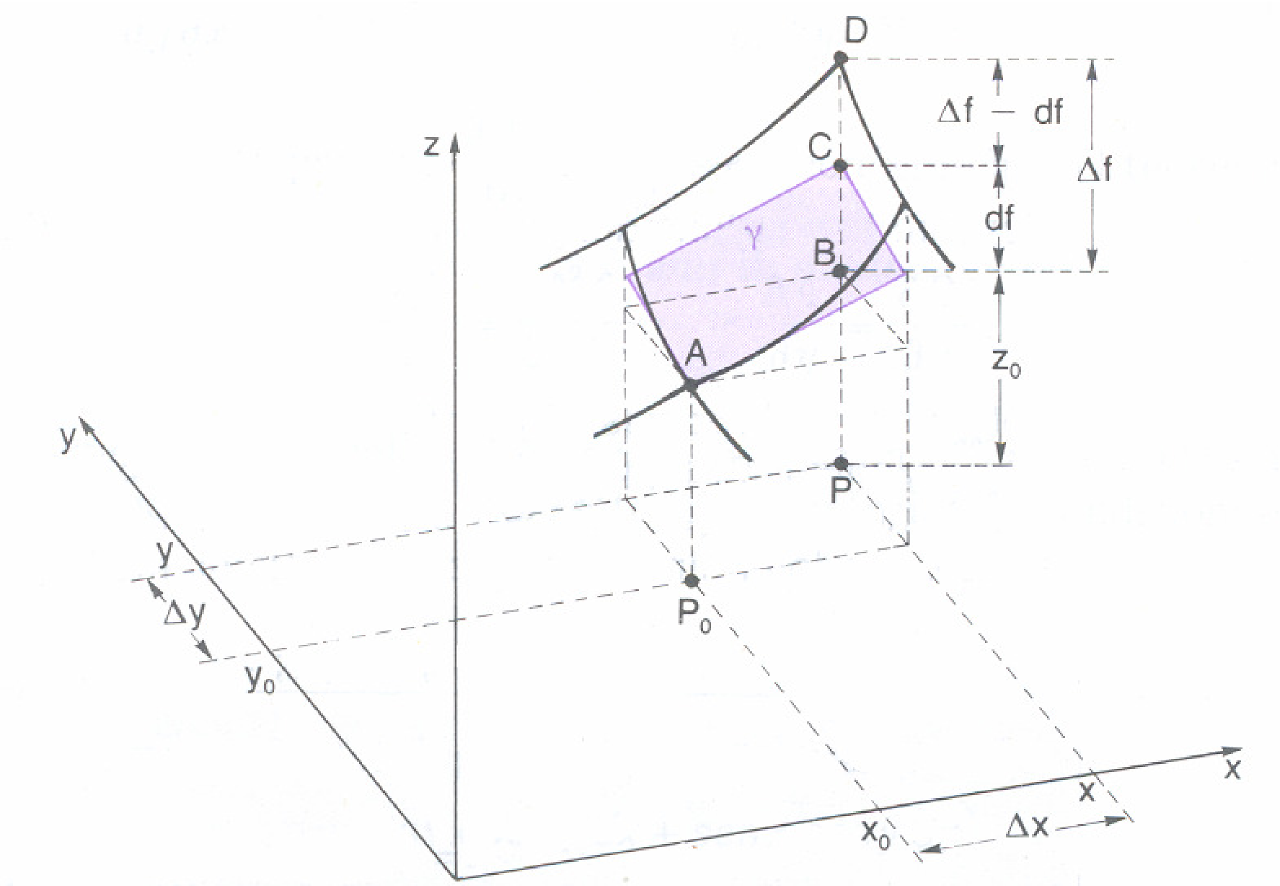

Figura 20 – Significato geometrico del differenziale totale di una funzione in due variabili.