ESERCIZI

Risolvere le seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni in due variabili.

1) $x-2y+6<0$
2) $2x^2+2y^2+3x-4y-1\le 0$
3) $4x^2+25y^2\ge 36$
4) $x^2-4y^2+1<0$
5) $\begin{cases}9-4x^2-y^2\ge 0\\ x-y^2>0\end{cases}$
6) $\begin{cases}-x^2+4+y>0\\ x^2+y^2-y-4\ge 0\end{cases}$
7) $\dfrac{x-y^2+8}{x-y}>0$
8) $\dfrac{(x+2y-2)(x^2-y+1)}{y^2-x+2}\ge 0$
9) $\dfrac{x^2+y^2-6x-8y}{xy-2x-y+2}\ge 0$
10) $\begin{cases}|x|-5\ge 0\\ |y|-2>0\\ e^x-1-y>0\\ y-x\ge 0\end{cases}$

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

11) $f(x,y)=ln(y+2x+1)$ [semipiano aperto con origine nella retta $y+2x+1=0$ e contenente l'origine]
12) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ [$\mathbb{R}^2$]
13) $f(x,y)=\sqrt{y-\dfrac{1}{x}}$ [la parte di piano che si trova "al di sopra" dell'iperbole $xy=1$, compresa l'iperbole]
14) $f(x,y)=\sqrt{-ln(x^2+y^2-8)}$ [corona circolare con centro nell'origine e raggi $2\sqrt{2}$ e 3. La circonferenza interna è esclusa]
15) $f(x,y)=log_x y$ [ricordare la definizione di logaritmo; primo quadrante esclusi gli assi e la retta $x=1$]
16) $f(x,y)=x^y$ [semipiano delle ascisse positive]
17) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ [$\mathbb{R}^2$ escluso l'origine]
18) $f(x,y)=\dfrac{ln\,x}{y}$ [semipiano delle ascisse positive escluso l'asse x]

19) $f(x,y) = arcsenx + arcseny$ [quadrato definito dalle strisce $|x| \le 1$ e $|y| \le 1$

20) $f(x,y) = arctg\left(\frac{1}{xy}\right)$ [$\mathbb{R}^2$ esclusi gli assi]

21) $f(x,y) = ln(1-xy)$ [parte di piano aperta delimitata dall'iperbole $xy = 1$ e contente l'origine]

22) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ [cerchio di centro l'origine e raggio 1]

23) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2y^2}$

24) $f(x,y) = ln\frac{x^2-y^2}{1-x^2y^2}$

25) $f(x,y) = \sqrt{9-4x^2-y^2} + ln(y-x^2)$

26) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{y^2-x}}$

27) $f(x,y) = \sqrt{xy-2}$

28) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

29) $f(x,y) = \sqrt{ln(y-x)}$

30) $f(x,y) = \sqrt{sen(xy)}$

31) $f(x,y) = \sqrt{log_{\frac{1}{2}}(x-2y)}$

32) $f(x,y) = \sqrt{ln\frac{x-y+1}{x+y-1}}$

33) $f(x,y) = \sqrt{\frac{1-x}{y-x^2}}$

34) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y-x}{y-x^2}}$

35) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-6x-8y}{xy}}$

36) $f(x,y) = \sqrt{1-xy} + \sqrt{9-x^2-y^2}$

37) $f(x,y) = \sqrt{y-\sqrt{x}}$

38) $f(x,y) = \sqrt{\frac{y-e^x}{y-e^{-x}}}$

39) Si consideri le funzioni $f(x,y)=ln(xy)$ e $f(x,y)=ln\,x+ln\,y$. I loro domini sono coincidenti?

40) Sia D il dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{xy}$ e sia D' il dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, quale delle seguenti affermazioni è vera? $D=D'$, $D\subset D'$, $D'\subset D$. Perché?

Determinare le curve di livello delle seguenti funzioni

40) $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ [fascio di rette per l'origine, privo dell'origine e dell'asse y]

41) $f(x,y)=\dfrac{y+1}{(x+2)^2}$ [fascio di parabole]

42) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{2-x}$ [fascio di rette]

43) $f(x,y)=ln(x^2-y^2)$ [fascio di iperboli equilatere]

44) $f(x,y)=\dfrac{4x-2y}{x^2+y^2}$ [fascio di circonferenze]

45) $f(x,y)=ln(4x^2+9y^2-36)$ [fascio di ellissi]

46) $f(x,y)=xy$

47) $f(x,y)=x^2-y^2$

48) $f(x,y)=x^2y^2$

49) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$

50) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

51) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

52) $f(x,y)=\sqrt{xy}$

53) $f(x,y)=e^{xy}$

54) $f(x,y)=e^{x+y}$

55) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$

56) $f(x,y)=ln(x+y)$

Calcolare i seguenti limiti

57) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ [0]

58) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ [non esiste]

59) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$ [non esiste]

60) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4y^4}{x^2+y^2}$ [0]

61) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{1-x}{y}$ [non esiste]

62) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{xy\left(x^4+y^4\right)}{x^3+y^3}$ [non esiste]

63) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^4+3y^4}{3x^2+y^2}$ $[+\infty]$

64) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2-xy+y^2}$ [0]

65) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{(x-1)^2+y^2}{x+y-1}$ [non esiste]

Dimostrare che le seguenti funzioni sono continue nei punti a fianco indicati:

66) $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ $P(5\pi,2)$

67) $f(x,y)=\ln x+\ln y$ $P(e,1)$

68) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3xy+y^2}{x-y}$ $P(-3,2)$

69) $f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2}}+\cos\sqrt{y}$ $P(-1,1)$

70) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^4+y^4}\right)$ $P\left(\sqrt{2},\pi\right)$

Applicando la definizione calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni nel punto indicato

71) $f(x,y)=2x^2-y^2+3$ $P(1,-2)$ $\left[f_x'=4;\ f_y'=4\right]$

72) $f(x,y)=-x^2y$ $P(1,-3)$ $\left[f_x'=6;\ f_y'=-1\right]$

73) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ $P(-6,2)$ $\left[f_x'=\dfrac{1}{2};\ f_y'=\dfrac{3}{2}\right]$

74) $f(x,y)=e^{2x+y}$ $P(2,-3)$ $\left[f_x'=2e;\ f_y'=e\right]$

75) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $P(-4,-3)$ $\left[f_x'=-\dfrac{4}{5};\ f_y'=-\dfrac{3}{5}\right]$

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni

76) $f(x,y)=xy$ $\quad\left[f_x'=y;\, f_y'=x\right]$

77) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{1}{y};\, f_y'=-\dfrac{x}{y^2}\right]$

78) $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ $\quad\left[f_x'=2x-y;\, f_y'=2y-x\right]$

79) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ $\quad\left[f_x'=-\dfrac{1}{x^2};\, f_y'=-\dfrac{1}{y^2}\right]$

80) $f(x,y)=3x^2-5xy+2y^2$ $\quad\left[f_x'=6x-5y;\, f_y'=-5x+4y\right]$

81) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{x-y}{x^2y};\, f_y'=\dfrac{y-x}{xy^2}\right]$

82) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{x^2+2xy^2-y}{\left(x+y^2\right)^2};\, f_y'=\dfrac{x-2x^2y-y^2}{\left(x+y^2\right)^2}\right]$

83) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{2x+y}$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{2y^2}{(2x+y)^2};\, f_y'=\dfrac{4x^2}{(2x+y)^2}\right]$

84) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\, f_y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

85) $f(x,y)=x^2+\sqrt{2x+y}+2y$ $\quad\left[f_x'=2x+\dfrac{1}{\sqrt{2x+y}};\, f_y'=2+\dfrac{1}{2\sqrt{2x+y}}\right]$

86) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}};\, f_y'=\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]$

87) $f(x,y)=e^{xy}$ $\quad\left[f_x'=ye^{xy};\, f_y'=xe^{xy}\right]$

88) $f(x,y)=ln(xy)$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{1}{x};\, f_y'=\dfrac{1}{y}\right]$

89) $f(x,y)=x\,ln(x-y+2)$ $\quad\left[f_x'=ln(x-y+2)+\dfrac{x}{x-y+2};\, f_y'=-\dfrac{x}{x-y+2}\right]$

90) $f(x,y)=x+ln\,y$ $\quad\left[f_x'=1;\, f_y'=\dfrac{1}{y}\right]$

91) $f(x,y)=sen\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\quad\left[f_x'=\dfrac{-y}{x^2}cos\left(\dfrac{y}{x}\right);\, f_y'=\dfrac{1}{x}cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$

92) $f(x,y)=(x+y)\,sen(x-y)$

$$\left[f_x'=sen(x-y)+(x+y)cos(x-y);\, f_y'=sen(x-y)-(x+y)cos(x-y)\right]$$

93) $f(x,y)=cos\left(y+x^2\right)$ $\quad\left[f_x'=-2x\,sen\left(y+x^2\right);\, f_y'=-sen\left(y+x^2\right)\right]$

94) $f(x,y) = xtgy$ $\qquad \left[f_x' = tgy;\, f_y' = \dfrac{x}{cos^2 y} \right]$

95) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ $\qquad \left[f_x' = 2xe^{x^2-y^2};\, f_y' = -2ye^{x^2-y^2} \right]$

96) $f(x,y) = \dfrac{1}{y} ln\, x$ $\qquad \left[f_x' = \dfrac{1}{xy};\, f_y' = -\dfrac{ln\, x}{y^2} \right]$

97) $f(x,y) = ysenx + xseny$ $\qquad \left[f_x' = y\,cos\, x + seny;\, f_y' = senx + x\,cos\, y \right]$

98) $f(x,y) = arcsen(xy)$ $\qquad \left[f_x' = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}};\, f_y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right]$

99) $f(x,y) = tg(xy)$ $\qquad \left[f_x' = \dfrac{y}{cos^2(xy)};\, f_y' = \dfrac{x}{cos^2(xy)} \right]$

100) $f(x,y) = arctg\left(x^2 - y\right)$ $\qquad \left[f_x' = \dfrac{2x}{1+\left(x^2-y\right)^2};\, f_y' = \dfrac{-1}{1+\left(x^2-y\right)^2} \right]$

101) $f(x,y) = arcsen\sqrt{1-xy}$ $\qquad \left[f_x' = \dfrac{-y}{2\sqrt{xy(1-xy)}};\, f_y' = \dfrac{-x}{2\sqrt{xy(1-xy)}} \right]$

102) $f(x,y) = x^{ln\, y}$ $\qquad \left[f_x' = \dfrac{ln\, y}{x} x^{ln\, y};\, f_y' = \dfrac{ln\, x}{y} x^{ln\, y} \right]$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni date, nel punto indicato

103) $z = x^2 - y^2$ $\qquad P_0(1,2)$ $\qquad [z = 2x - 4y - 3]$

104) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad P_0\left(2, -\dfrac{3}{2}\right)$ $\qquad \left[z = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{5}{2} \right]$

105) $z = senx \cdot seny$ $\qquad P_0\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\qquad \left[z = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \right]$

Calcolare le derivate parziali del secondo ordine delle seguenti funzioni

106) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad \left[f_{xx}'' = 2;\, f_{xy}'' = f_{yx}'' = 0;\, f_{yy}'' = -2 \right]$

107) $f(x,y) = 3x^3y - 2x^2y^2$ $\qquad \left[f_{xx}'' = 18xy - 4y^2;\, f_{xy}'' = f_{yx}'' = 9x^2 - 8xy;\, f_{yy}'' = -8x \right]$

108) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ $\qquad \left[f_{xx}'' = \dfrac{4y}{(x-y)^3};\, f_{xy}'' = f_{yx}'' = \dfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3};\, f_{yy}'' = \dfrac{4x}{(x-y)^3} \right]$

109) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ $\qquad \left[f_{xx}'' = \dfrac{2y}{x^3};\, f_{xy}'' = f_{yx}'' = -\dfrac{1}{x^2};\, f_{yy}'' = 0 \right]$

110) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ $\qquad \left[f_{xx}'' = \dfrac{2y}{x^3};\, f_{xy}'' = f_{yx}'' = -\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2};\, f_{yy}'' = \dfrac{2x}{y^3} \right]$

111) $f(x,y)=\sqrt{xy}$ $\left[f''_{xx}=-\frac{\sqrt{y}}{4\sqrt{x^3}}; f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{1}{4\sqrt{xy}}; f''_{yy}=-\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y^3}}\right]$

112) $f(x,y)=e^x \ln y$ $\left[f''_{xx}=e^x \ln y; f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{e^x}{y}; f''_{yy}=-\frac{e^x}{y^2}\right]$

113) $f(x,y)=x \ln y$ $\left[f''_{xx}=0; f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{1}{y}; f''_{yy}=-\frac{x}{y^2}\right]$

114) $f(x,y)=y \cos x$ $\left[f''_{xx}=-y\cos x; f''_{xy}=f''_{yx}=-\mathrm{sen}x; f''_{yy}=0\right]$

115) $f(x,y)=\mathrm{sen}x\cdot \mathrm{sen}y$ $\left[f''_{xx}=-\mathrm{sen}x\cdot\mathrm{sen}y; f''_{xy}=f''_{yx}=\cos x\cdot\cos y; f''_{yy}=-\mathrm{sen}x\cdot\mathrm{sen}y\right]$

Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni, specificando se sono massimi, minimi relativi o punti di sella.

116) $f(x,y)=x^3+y^2-3x$ [sella in $(-1,0)$, minimo $f(1,0)=-2$]

117) $f(x,y)=y(x^3-x)$ [punti di sella in (0,0); (–1,0); (1,0)]

118) $f(x,y)=(x^2-1)(y^2-1)$ [massimo $f(0,0)=1$, 4 punti di sella $(\pm1,\pm1)$]

119) $f(x,y)=x^6+y^6-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2+3xy$ [minimi $f(1,-1)=f(-1,1)=-4$, punto di sella nell'origine]

120) $f(x,y)=x^7+y^7-7xy$ [minimo $f(1,1)=-5$, punto di sella nell'origine]

121) $f(x,y)=x^8+y^8-8xy$ [minimi $f(-1,-1)=f(1,1)=-6$, punto di sella nell'origine]

122) $f(x,y)=(\ln x)(\ln y)$ [sella in (1,1)]

123) $f(x,y)=(x+y-1)^2$ [i punti della retta $x+y-1=0$ sono punti di minimo con hessiano nullo]

124) $f(x,y)=y^2+e^{x^2}$ [mimino $f(0,0)=1$]

125) $f(x,y)=x^3-y^3+3xy$ [minimo $f(1,-1)=-1$, sella nell'origine]

126) $f(x,y)=x^5-y^5-5xy$ [massimo $f(-1,1)=3$, sella nell'origine]

127) $f(x,y)=(xy-1)^2$ [punto di sella nell'origine; i punti dell'iperbole $xy=1$ sono punti di minimo con hessiano nullo]

128) $f(x,y)=xy(x+3y-3)$ [minimo $f\left(1,\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$; punto di sella nell'origine; punti di in (0,1) e (3,0)]

129) $f(x,y)=e^y(y+x^2)$ [mimino $f(0,-1)=-1/e$]

130) $f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$ [(3,3) punto di minimo (0,0) punto di sella]

131) $f(x,y)=x^4+y^4-9(x^2+y^2)+4xy$ [(0,0) punto con hessiano nullo, studiando l'intorno del punto (lungo l'asse x e lungo la bisettrice y=x) si deduce che è un punto di sella $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ punti di minimo relativo]

132) $f(x,y)=y^2(x^2-1)$ [(-1,0) e (-1,0) punti di sella, tutti i punti del tipo (x,0) con x<-1 o x>1 sono punti di minimo, tutti i punti del tipo (x,0) con -1<x-1 sono punti di massimo]

133) $f(x,y)=x^2ye^{x+y}$ [(-2,-1) punto di minimo, tutti i punti asse y sono punti di sella]

134) $f(x,y)=xye^{x+y}$ [origine punto di sella , (-1,-1) max relativo]

135) $f(x,y)=-x^2+ln\,x-y+ln\,y$ [($\sqrt{\frac{1}{2}}$;1) max relativo]

136) Determinare a e b in modo che la funzione $z=x^2+y^2+ax+by$ abbia un minimo nel punto (3, –2)

137) Si verifichi che, per qualunque valore delle costanti α e β, la funzione $f(x,y)=(x^2+\alpha)e^{\beta y^2}$ ha nell'origine un punto stazionario e se ne studi il carattere. [αβ>0 minimo; αβ <0 punto di sella; α=0, β=0 minimo con hessiano nullo]

Determinare massimi e i minimi assoluti delle seguenti funzioni nelle regioni indicate

138) $f(x,y)=2x^2+y^2-x$ nel cerchio che ha centro nell'origine e raggio 1 [Massimo assoluto in (–1,0) , minimo assoluto in $\left(\frac{1}{4},0\right)$]

139) $f(x,y)=3x^2+4y^2-6x+3$ nel cerchio che ha centro nell'origine e raggio 2 [Massimo assoluto in (–2,0) , minimo assoluto in $(1,0)$]

140) $f(x,y)=24x^4+3y^4-(x-y)^2$ nel triangolo limitato dalle rette *x* = 0, *y* = *x*, *y* = 1. [Massimo assoluto in (1,1) , minimo assoluto in $\left(0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$]

141) $f(x,y)=(x^2-y^2)(x-2)$ nel triangolo limitato dalle rette *x* = 2, *y* = *x*, *y* = –*x*. [Massimo assoluto su tutti i punti della frontiera, minimo assoluto in $\left(\frac{4}{3},0\right)$]

142) $f(x,y)=x^3+3x-6xy+3y^2$ nel quadrato limitato dagli assi coordinati e dalle rette *x*=2 e *y*=2. [Massimo assoluto in $(2,0)$, minimo assoluto in $(0,0)$]

143) $f(x,y)=(1-x^2-y^2)(x+y)$ nel semicerchio $x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0$. [Massimo assoluto in $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, minimo assoluto in $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$]

144) $f(x,y)=e^{x^2-y^2-xy}$ nel quadrato $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$. [Massimo assoluto in $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, minimo assoluto in $\left(\frac{1}{2},-1\right)$]

145) $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y-3$ nel cerchio che ha centro nell'origine e raggio 2 [Massimo assoluto in $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, minimo assoluto in $(1,1)$]

146) $f(x,y)=xy$ nel quadrato $|x|\le 1,\ |y|\le 1$. [Massimo assoluto nei punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$, minimo assoluto nei punti $(1,-1)$ e $(-1,1)$]

147) $f(x,y)=x^2+y^2$ nel cerchio di equazione $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2\le 9$. [Massimo assoluto in $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$, minimo assoluto in $(0,0)$]

148) $f(x,y)=x^3+4xy^2-4x$ sotto la condizione $x^2+y^2-1=0$. [Massimo assoluto in $(-1,0)$, minimo assoluto in $(1,0)$]

149) $f(x,y)=x+y$ sotto la condizione $x^2+4y^2-1=0$. [Massimo assoluto in $\left(\frac{2}{5}\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, minimo assoluto in $\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5},-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$]

Scrivere l'espressione del differenziale totale delle seguenti funzioni nel punto a fianco indicato.

150) $f(x,y)=x^2y^2$ $\quad P(1,1)$ $\quad$ [$df=2dx+2dy$]

151) $f(x,y)=x^2y^2$ $\quad P(0,0)$ $\quad$ [$df=0$]

152) $f(x,y)=x^2y-xy^2$ $\quad P\left(\frac{1}{3},-1\right)$ $\quad$ [$df=-3dx+dy$]

153) $f(x,y)=x^2-y^2$ $\quad P(-1,2)$ $\quad$ [$df=-2dx-4dy$]

154) $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ $\quad P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ [$df=-\frac{5}{2}dx+\frac{5}{3}dy$]

Scrivere il differenziale totale in un punto generico

155) $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$ $\quad$ [$df=2xydx+x^2dy$]

156) $f(x,y)=x^3y+x^2y^2+xy^3$ $\quad$ [$df=\left(3x^2y+2xy^2+y^3\right)dx+\left(x^3+2x^2y+3xy^2\right)dy$]

157) $f(x,y)=xseny-ysenx$ $\quad$ [$df=(seny-y\cos x)dx+(x\cos y-s\,enx)dy$]

158) $f(x,y)=x^3y+2xy^3$ $\quad$ [$df=\left(3x^2+2y^2\right)dx+\left(x^2+6y^2\right)xdy$]

159) $f(x,y)=arctg\,\frac{y}{x}$ $\quad$ [$df=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$]

160) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ $\quad$ [$df=2e^{x^2-y^2}(xdx-ydy)$]

161) $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ [$df=\frac{y(ydx-xdy)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$]

162) Confrontare dz con Δz per la $z=x^2+2xy-3y^2$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2(x+y)dx+2(x-3y)dy$$

$$\Delta z=f(x+dx,y+dy)-f(x,y)=2(x+y)dx+2(x-3y)dy+(dx)^2+2dxdy-3(dy)^2$$

163) Approssimare l'area del rettangolo avente dimensioni 35,02 e 24,97 unità [si pone x=35, y=25, dx = 0,02, dy = –0,03; si ha: A = xy; $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = ydx + xdy$ da cui l'area uguale a $A + dA$ = 874,45]

164) Calcolare l'errore massimo possibile e l'errore percentuale quando z viene calcolato mediante le formule:

a. $z = \pi r^2 h$; r = 5 ± 0,05; h = 12 ± 0,1 [8,5π; 2,8%]

b. $\frac{1}{z} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; p = 4 ± 0,01; q = 8 ± 0,02 [0,0067; 0,25%]

c. $z = \frac{y}{x}$; x = 1,8 ± 0,1; y = 2,4 ± 0,1 [0,13; 10%]

165) Trovare $\frac{dz}{dt}$ dati $z = x^2 + 3xy + 5y^2$; $x = sent$; $y = cost$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 6cos^2 t - 8\cos t sent - 3x$$

166) Calcolare $\frac{dz}{dt}$ dati $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; con $x = e^{-t}$; $y = e^t$ [$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2 + y^2}$]

167) Calcolare $\frac{dz}{dx}$ dati $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ e $y = e^{\alpha t}$ [$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2(x + y) + 2\alpha(x + 4y)e^{\alpha x}$]

168) Se $u = f(x, y)$ e $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, mostrare che $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

169) Se $z = f(x + \alpha y) + g(x - \alpha y)$ mostrare che $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ [Scrivere $z = f(u) + g(v)$]