Estensione del concetto di integrale definito

1 – Integrale definito di una funzione continua a tratti

Per semplicità, supponiamo che $y = f(x)$ sia una funzione continua in tutti i punti di un intervallo $[a,b]$ ad eccezione del punto $x = x_0$, dove supponiamo che vi sia una discontinuità di 1ª specie. Siano ε e δ due numeri positivi tali che $a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \delta < b$. La funzione $f(x)$ risulta pertanto continua a integrabile negli intervalli $[a, x_0 - \varepsilon]$ e $[x_0 + \delta, b]$.
L'integrale

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx$$

sarà una funzione di ε, così come

$$\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

sarà una funzione di δ. Nelle ipotesi fatte, definiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0^-} \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

OSSERVAZIONE: Il procedimento di applica anche se la funzione non è definita in x_0 e si può estendere facilmente al caso in cui nell'intervallo $[a,b]$ vi sia un numero finito di discontinuità. Il metodo è applicabile anche se la discontinuità si ha ad un estremo, purché esita il limite.

<u>ESEMPIO 1</u> – Calcolare, se possibile, $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ essendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 4x - x^2 & 1 < x \le 4 \end{cases}$$

Si ha:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} x^2\,dx + \lim_{\delta\to 0^-} \int_{1+\delta}^{4} \left(4x - x^2\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0^-} \left| 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_{1+\delta}^{4} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{(1-\varepsilon)^3}{3} + \frac{1}{3} \right) + \lim_{\delta\to 0^-} \left| 32 - \frac{64}{3} - 2(1+\delta)^2 + \frac{(1+\delta)^3}{3} \right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 32 - \frac{64}{3} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{29}{3}$$

◊

<u>ESEMPIO 2</u> – Calcolare, se possibile, $\int_0^1 x \ln x\,dx$.
Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0^-$$

Si ha: $\int_0^1 x \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left| \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right|_{\varepsilon}^{1} = -\frac{1}{4}$

◊

2 – Integrali impropri.

Per integrali impropri si intendono integrali in cui l'intervallo di integrazione sia illimitato (li chiameremo di primo tipo) o la funzione sia illimitata al massimo in un numero finito di punti (li chiameremo di secondo tipo) nell'intervallo di integrazione.

3 – Integrali impropri di primo tipo.

Si vuol calcolare

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

di una funzione $f(x)$ integrabile in ogni intervallo del tipo $[a,t]$, con a numero reale fissato e $t > a$.
Diremo che *la funzione è integrabile in senso improprio o generalizzato* nell'intervallo $[a,+\infty[$ se esiste finito

(1) $$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

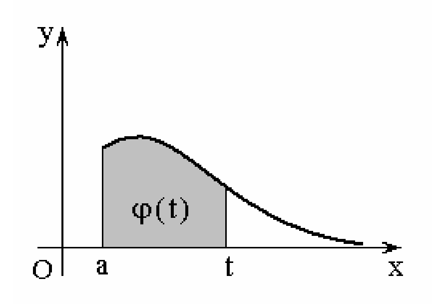

Figura 1

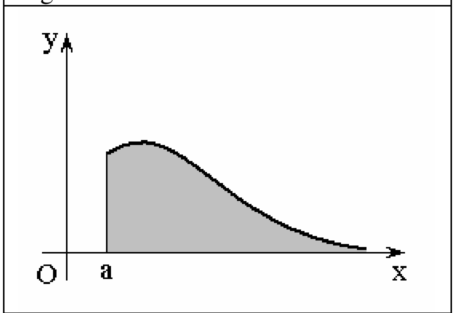

Figura 2

Scriveremo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx .$$

Si usa anche dire che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è *convergente*. Ne caso il limite (1) fosse infinito, si dice che l'*integrale diverge*, nel caso non esistesse si dice che l'*integrale è indeterminato*.

La definizione ora data ha una interpretazione geometrica immediata: si consideri infatti una funzione $f(x)$ continua e positiva per $x \geq a$. L'integrale $\varphi(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ rappresenta l'area del trapezoide delimitato dal grafico della funzione, dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = t$ (vedi figura 1). Il limite: $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$, cioè l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, rappresenta l'area della parte di piano illimitata compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle x e la retta di equazione $x = a$ (vedi figura 2). Se l'integrale improprio è convergente, l'area è finita; se l'integrale improprio è divergente, l'area è infinita.

In modo analogo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^b f(x)\,dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\,dx .$$

<u>ESEMPIO 3</u> – Calcolare $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$.

La funzione integranda $\frac{1}{(x+1)^2}$ è continua nell'intervallo [2, +∞ [e pertanto integrabile in ogni intervallo del tipo [2, t]. Si ha:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\left|-\frac{1}{x+1}\right|_2^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

◊

<u>ESEMPIO 4</u> – Calcolare $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x+3}dx$.

Si ha

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x+3}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{2x+3}dx = \lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{2}ln(2x+3)\right|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\big(ln(2t+3)-ln5\big)=+\infty$$

Quindi l'integrale improprio è divergente.

◊

<u>ESEMPIO 5</u> – Calcolare $\int_0^{+\infty} senxdx$.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} senxdx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t senxdx = \lim_{t\to+\infty}\left|-cos\,x\right|_0^t = \lim_{t\to+\infty}(-cos\,t+1)$$

Ma $\lim\limits_{t\to+\infty} cos\,t$ non esiste, quindi l'integrale improprio è indeterminato.

◊

<u>ESEMPIO 6</u> – Calcolare $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

Si ha

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 e^x dx = \lim_{s\to-\infty}\left|e^x\right|_s^0 = \lim_{s\to-\infty}\left(1-e^s\right)=1$$

◊

<u>ESEMPIO 7</u> – Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\left|arctgx\right|_s^t = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}(arctgt-arctgs)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi .$$

Essendo la funzione integranda pari si poteva anche scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

◊

<u>ESEMPIO 8</u> – Verificare che $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\left(sen\frac{1}{x}-\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}\right)dx=\frac{\pi-2}{\pi}$.

Si osservi che, integrando per parti si ha

$$\int\left(sen\frac{1}{x}-\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}\right)dx = \int sen\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}dx = xsen\frac{1}{x}+\int\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}dx = xsen\frac{1}{x},$$

da cui segue

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\left(sen\frac{1}{x}-\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}\right)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{t}\left(sen\frac{1}{x}-\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}\right)dx=\lim_{t\to+\infty}\left|xsen\frac{1}{x}\right|_{\frac{2}{\pi}}^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(tsen\frac{1}{t}-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi-2}{\pi}.$$

◊

Analizzando gli esempi di ci sopra si può osservare che quando l'integrale improprio converge la funzione integranda è infinitesima per $x \to \infty$. È facile comprendere che se la funzione all'infinito tende ad un valore finito o addirittura diverge, l'integrale (che ricordiamo è un'area) non potrà essere un valore finito, ma per forza di cose deve essere infinito. Vale quindi il seguente teorema:

<u>TEOREMA</u> – Se l'integrale improprio del primo tipo della funzione $y = f(x)$ converge, allora $f(x)$ è infinitesima per $x \to \infty$.

<u>ESEMPIO 9</u> – Consideriamo ora la funzione

$$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}^{+}$$

in un intorno di $+\infty$, cioè in un intorno del tipo $[a,+\infty[$ con $a > 0$. Si verifica facilmente che $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0$ ed è continua in $[a,+\infty[$, inoltre la funzione ammette primitiva: $F(x)=\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ se $\alpha\neq1$ e $F_1(x)=ln\,x$ se $\alpha=1$.

Per $\alpha \neq 1$ si ha quindi

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^{t}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^t=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)$$

Si osservi che se è $-\alpha+1 < 0$, ossia $\alpha > 1$, $\lim_{t\to+\infty}t^{-\alpha+1}=0$, mentre se è $-\alpha+1 > 0$, ossia $\alpha < 1$, $\lim_{t\to+\infty}t^{-\alpha+1}=+\infty$. Si ha quindi:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\begin{cases}\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & se \quad \alpha>1\\ +\infty & se \quad 0<\alpha<1\end{cases}$$

Si noti poi che se $\alpha < 0$, la funzione integranda, per $x \to +\infty$, tende a $+\infty$ e quindi $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=+\infty$.

Per $\alpha = 1$ si ha:

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^{t}\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+\infty}\left|ln\,x\right|_a^t=\lim_{t\to+\infty}\left(ln\,t-ln\,a\right)=+\infty.$$

Si può quindi concludere che la funzione $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[a,+\infty[$, con $a > 0$, per $\alpha > 1$ e non lo è per $\alpha \le 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} converge & per \quad \alpha > 1 \\ diverge & per \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e, per $\alpha > 1$ si ha $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha - 1) a^{\alpha-1}}$

◊

Vediamo ora alcune proprietà degli integrali generalizzati.

PROPRIETÀ 1 – Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è convergente e se $b > a$, allora anche $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ è convergente. Vale cioè:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{b} f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx \quad \text{con} \quad a > b.$$

PROPRIETÀ 2 – Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è convergente per ogni $b > a$, si ha:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_b^{+\infty} f(x) dx = 0 \quad \text{con} \quad a > b.$$

PROPRIETÀ 3 – Se la funzione $y = f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo tipo $[a,+\infty[$, allora anche la funzione $y = cf(x)$ è integrabile (c è una costante reale), si ha:

$$\int_a^{+\infty} c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^{+\infty} f(x) dx .$$

PROPRIETÀ 4 – Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili in senso generalizzato nello stesso intervallo $[a,+\infty[$, allora anche la funzione $f(x) + g(x)$ è integrabile e si ha:

$$\int_a^{+\infty} \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx .$$

4 – Criteri di convergenza per gli integrali impropri di primo tipo.

Diamo ora alcuni criteri di convergenza per gli integrali impropri di funzioni non negative

TEOREMA 1 (PRIMO CRITERIO DEL CONFRONTO) – Se per $x \geq b$ (con $b \geq a$) le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono non negative e risulta

$$f(x) \leq g(x)$$

allora:

se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge;

se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, anche $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

ESEMPIO 10 – Stabilire la convergenza o la divergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

Si ponga $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$ e $g(x)=\dfrac{1}{x^4}$, si può facilmente notare che per $x \geq 1$[i] si ha $0 < x^4 < 1+x^4$ da cui segue facilmente $0<\dfrac{1}{1+x^4}<\dfrac{1}{x^4}$. Si ha quindi $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^4}dx<\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^4}dx$ ed essendo il secondo integrale convergente per quanto detto nell'esempio 9, per il teorema 1 si ha che l'integrale in questione converge.

◊

<u>ESEMPIO 11</u> – Verificare che $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{\ln x}dx$ è divergente.

Si osservi che per $x \geq e$ sussiste la disuguaglianza $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln x}$. Si ha quindi $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx<\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{\ln x}dx$ e, poiché l'integrale a sinistra diverge, per il teorema 1, anche l'integrale destra diverge.

◊

Come conseguenza del teorema 1, enunciamo il seguente teorema:

<u>TEOREMA 2 (SECONDO CRITERIO DEL CONFRONTO)</u> – Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative per $x \geq b$ (con $b \geq a$) e si supponga che per $x \geq b$ $g(x)$ non si annulli ed esista il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$ [ii]

allora:

1) Se $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ converge ed l è finito ($l \geq 0$), allora anche $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ converge.

2) Se $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ diverge ed l è non nullo (l finito o infinito), allora anche $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ diverge.

Si osservi che nel caso in cui l sia finito e non nullo il teorema afferma che gli integrali di $f(x)$ e $g(x)$ convergono entrambi o divergono entrambi.

<u>ESEMPIO 12</u> – Stabilire se $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^4-1}dx$ è convergente o divergente.

La funzione $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x^4-1}$ è continua nell'intervallo di integrazione e risulta non negativa per $x \geq 2$.

Prendiamo come funzione di confronto $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ e calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2-4}{3x^4-1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-4x^2}{3x^4-1}=\frac{1}{3}$$

[i] La scelta $x \geq 1$ è del tutto arbitraria, quel che conta è evitare che la funzione $g(x)$ sia illimitata, e per fare ciò basta escludere lo zero.

[ii] Per le ipotesi fatte, l può essere finito, zero è $+\infty$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente e il limite è finito, allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{x^2-4}{3x^4-1} dx$ è convergente.

◊

ESEMPIO 13 – Stabilire se $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}} dx$ è convergente o divergente.

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$ è continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Presa $g(x) = \frac{1}{x}$

si ha : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = 1$.

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ è divergente e il limite è finito, allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}} dx$ è divergente.

◊

ESEMPIO 14 – Verificare la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} sen^2 x dx$.

La funzione integrando è positiva o nulla nell'intervallo di integrazione, nonché continua. Prendiamo $g(x) = \frac{1}{x^2}$, si ha: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x} sen^2 x = 0$ [iii]

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è convergente e il limite è zero, allora l'integrale converge.

◊

ESEMPIO 15 – Verificare la divergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}} dx$.

La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Presa $g(x) = \frac{1}{x}$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+4}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+4}} = +\infty .$$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ è divergente e il limite è infinito, allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}} dx$ è divergente.

◊

OSSERVAZIONE – Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ è infinito e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ è convergente, non si può dire nulla sulla convergenza o meno dell'integrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. A tal proposito consideriamo le funzioni $f_1(x) = \frac{1}{x\,ln\,x}$ e $f_2(x) = \frac{1}{x\,ln^2 x}$ e come funzione di confronto per entrambe $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Applican-

[iii] Basta osservare che *senx* è limitata e che $x^2 e^{-x}$ tende a zero per $x \to +\infty$

do il teorema di De l'Hopital si ha: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{g(x)}=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{g(x)}=+\infty$

Applicando la definizione di integrale improprio del primo tipo si ha:

$$\int_e^{+\infty} f_1(x)\,dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx \text{ diverge}$$

e che

$$\int_e^{+\infty} f_2(x)\,dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx \text{ converge.}$$

Analogamente se $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergente non si potrebbe dire nulla sulla convergenza o meno di $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Per verificare tale affermazione si possono considerare nuovamente le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definite sopra e confrontarle con $g(x)=\frac{1}{x}$.

Ricordando la definizione di ordine di infinitesimo e quanto visto nell'esempio 9 a proposito della convergenza dell'integrale $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$, si dimostra il seguente teorema:

<u>TEOREMA 3</u> – Sia $f(x)$ non negativa per $x \ge b$ (con $b \ge a$).

Se, per $x \to +\infty$, $f(x)$ è infinitesima di ordine α e sia α > 1, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente.

Se invece $f(x)$ è infinitesima di ordine α e sia 0 < α < 1, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente.

<u>ESEMPIO 16</u> – Verificare che $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2x^4+x+1}dx$ è convergente.

La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Inoltre è infinitesima di ordine 4 per $x \to +\infty$; infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x^4+x+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{2x^4+x+1}=l\,.$$

(con l valore finito diverso da zero) solo se α = 4, in questo caso $l=\frac{1}{2}$. L'integrale è quindi convergente.

◊

<u>ESEMPIO 17</u> – Verificare che $\int_\pi^{+\infty}\frac{1}{x}\,sen\frac{1}{x}dx$ è convergente.

La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Inoltre è infinitesima di ordine a = 2 per $x \to +\infty$; infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}sen\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{1/x}}{\cancel{1/x}}\cdot\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}},$$

posto $\frac{1}{x}=y$ si ha: $\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{seny}{y}=1$ che è finito e diverso da zero. L'integrale $\int_\pi^{+\infty}\frac{1}{x}sen\frac{1}{x}dx$ è quindi convergente.

◊

<u>ESEMPIO 18</u> – Verificare se $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}dx$ è convergente o meno.

La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione. Per stabilire l'ordine di infinitesimo determiniamo per quale valore di α il seguente limite è finito e diverso da zero.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{(x+3)\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x\cdot x^{1/2}}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^{3/2}}$$

Si vede quindi che per α = 3/2 il limite considerato è uguale a 1 e quindi la funzione integranda è infinitesima di ordine α = 3/2 > 1. L'integrale converge.

◊

<u>ESEMPIO 19</u> – Verificare che $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}dx$ è divergente.

La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione e si dimostra facilmente che la funzione, all'infinito, è infinitesima di ordine α = 2/3 < 1, infatti: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}=1$[iv].

L'integrale dato è quindi divergente.

◊

OSSERVAZIONE – Per garantire l'integrabilità di una funzione non negativa in un intorno di +∞ non basta che $f(x)$ sia infinitesima di ordine superiore al primo, ma occorre che esista un numero a > 1 che ne esprima l'ordine di infinitesimo. Riprendiamo in esame le funzioni $f_1(x)=\frac{1}{x\ln x}$ e $f_2(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ che abbiamo analizzato sopra. Entrambe sono infinitesime, $x\to+\infty$, di ordine maggiore di 1, infatti:

[iv] Si noti che essendo la funzione pari è sufficiente fare il limite solo a +∞.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} = 0 .$$

Per nessuna delle due funzioni esiste però un numero a che ne identifichi l'ordine di infinitesimo. Infatti, se si suppone che la funzione $f_1(x)$ sia infinitesima di ordine 1+δ (con δ > 0) si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\delta}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\delta}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\delta}}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\delta x^{\delta-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \delta x^{\delta} = +\infty$$

quindi $f_1(x)$ è infinitesima di ordine inferiore a 1+δ, per ogni δ > 0.

Analogamente si può dimostrare che one $f_2(x)$ è infinitesima di ordine inferiore a 1+ε, per ogni ε>0.

Pertanto funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$, pur essendo infinitesime di ordine superiore al primo, risultano però infinitesime di ordine inferiore a qualunque numero maggiore di 1; non esiste quindi un numero che ne esprima l'ordine di infinitesimo e il teorema 3 non è applicabile. Infatti, come visto in precedenza, $f_1(x)$ non è integrabile, mentre $f_2(x)$ lo è.

5 – Criterio di integrabilità per le funzioni a segno non costante.

TEOREMA – Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ è convergente, allora l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.

Nel caso in cui $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ sia convergente si usa dire che la funzione $f(x)$ è *assolutamente integrabile* nell'intervallo [a,+∞[e che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è *assolutamente convergente*: in tal caso $f(x)$ è integrabile, cioè l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.

Si noti che non vale il viceversa, cioè: *se un integrale improprio* (del primo tipo) *è convergente, non è detto che converga assolutamente*.

<u>ESEMPIO 20</u> – Verificare che $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ è convergente.

La funzione integranda non ha segno costante nell'intervallo di integrazione. Consideriamo quindi $|f(x)| = \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x^2}$ alla quale possiamo applicare i criteri di convergenza visti per le funzioni non negative. Si ha: $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e quindi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \le \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$. Dato che

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{cos\, x}{x^2} dx$ converge.

◊

<u>ESEMPIO 21</u> – Mostrare che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{senx}{x} dx$ è convergente, ma non assolutamente convergente.

Incominciamo con l'osservare che la funzione $f(x) = \frac{s\,enx}{x}$ è integrabile nell'intervallo [0,1] in quanto è limitata in tale intervallo. L'unica discontinuità per $x = 0$ è tale per cui $\lim_{x \to 0} \frac{s\,enx}{x} = 1$. La convergenza o meno dell'integrale dato equivale quindi, per esempio, a quella dell'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{senx}{x} dx$. Applicando la definizione di integrale improprio si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{senx}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{senx}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\left| \frac{-cos\, x}{x} \right|_1^t - \int_1^t \frac{cosx}{x^2} dx \right] = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-cos\, t}{t} + cos 1 - \int_1^t \frac{cosx}{x^2} dx \right] =$$

$$= cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{cosx}{x^2} dx$$

Si è integrato per parti. L'integrale che rimane da calcolare, abbiamo visto nell'esempio procedente che è convergente, quindi l'integrale dato converge.
Per dimostrare che l'integrale dato non è assolutamente convergente, dobbiamo far vedere che $\int_0^{+\infty} \left| \frac{senx}{x} \right| dx$ diverge, o che è lo stesso che diverge $\int_1^{+\infty} \left| \frac{senx}{x} \right| dx$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $\int_1^{+\infty} \left| \frac{senx}{x} \right| dx$ converga. Allora, essendo $sen^2 x \leq |senx|$, si ha che $\int_1^{+\infty} \frac{sen^2 x}{x} dx$ converge. Dalle formule di bisezione si ha che $sen^2 x = \frac{1 - cos\, 2x}{2}$ e quindi risulterebbe convergente anche $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1 - cos\, 2x}{x} dx$. Aggiungendo a tale integrale convergente, l'integrale convergente $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{cos\, 2x}{x} dx$ (la cui convergenza si dimostra in modo del tutto analogo a quella effettuata sopra per $\int_1^{+\infty} \frac{senx}{x} dx$) si dovrebbe ottenere un integrale convergente, ma $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1 - cos\, 2x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{cos\, 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Ciò è assurdo in quanto, come è noto, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ è divergente. Si è così dimostrato che $\int_0^{+\infty} \frac{s\,enx}{x} dx$ è convergente ma non assolutamente.

◊

6 – Integrali impropri del secondo tipo.

Gli integrali impropri del secondo tipo sono quelli relativi a funzioni illimitate in qualche punto dell'intervallo *limitato* $[a,b]$ di integrazione.
Iniziamo con il dare la definizione di integrale improprio, in un intervallo $[a,b]$, di una funzione $f(x)$, che sia limitata ed integrabile in ogni intervallo strettamente contenuto in $[a,b]$, che sia illi-

mitata in $x = b$.
Diremo che *la funzione* $f(x)$ *è integrabile in senso improprio* (o *generalizzato*) *nell'intervallo* $[a,b]$, *se esiste finito il limite*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,.$$

In tal caso si dice anche che l'integrale improprio (o generalizzato) $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.

Se invece il limite è infinto si dirà che *la funzione* $f(x)$ *non è integrabile in senso improprio nell'intervallo* $[a,b]$, e *l'integrale è divergente.*
Se il limite non esiste si dirà che $f(x)$ *non è integrabile nell'intervallo* $[a,b]$, e *l'integrale è indeterminato.*

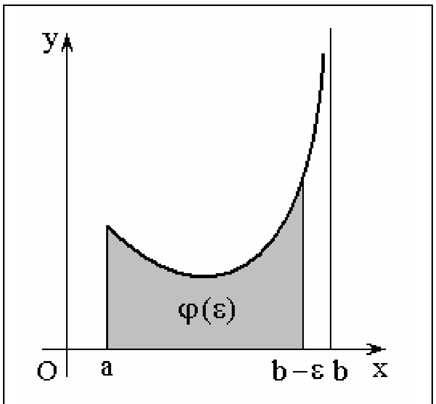

Figura 3

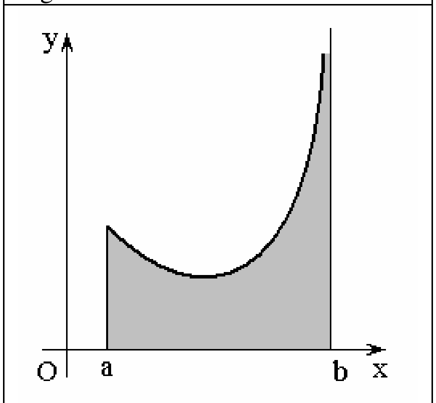

Figura 4

La definizione data ha una interpretazione geometrica immediata: si consideri infatti una funzione $f(x)$ continua e positiva in $[a,b[$ e tale che $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$. L'integrale $\varphi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ rappresenta l'area del trapezoide delimitato dal grafico della funzione, dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b - \varepsilon$ (vedi figura 3. $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varphi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, cioè l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$, rappresenta l'area della parte di piano illimitata compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle x e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$ (vedi figura 4. Se l'integrale improprio è convergente, l'area è finita; se l'integrale improprio è divergente, l'area è infinita.

In modo del tutto analogo si può definire l'integrale improprio di una funzione illimitata in $x = a$ e che sia integrabile in ogni intervallo del tipo $[a + \delta, b]$ con $0 < \delta < b - a$. Diremo che una tale funzione è integrabile in tipo $[a,b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx\,.$$

In tal caso si dice anche che l'integrale improprio (o generalizzato) $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.

Se invece il limite è infinto si dirà che *la funzione* $f(x)$ *non è integrabile in senso improprio nell'intervallo* $[a,b]$, e *l'integrale è divergente.*
Se il limite non esiste si dirà che $f(x)$ *non è integrabile nell'intervallo* $[a,b]$, e *l'integrale è indeterminato.*

In modo del tutto analogo si può definire l'integrale improprio di una funzione che sia illimitata per $x = a$ e $x = b$, ma che sia limitata e integrabile in ogni intervallo del tipo $[a + \delta, b - \varepsilon]$ che sia interamente contenuto in $[a,b]$. Diremo che f è integrabile se esiste finito:

$$\lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

Scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

La definizione data ora si può estendere al caso di funzioni che siano generalmente limitate nell'intervallo $[a,b]$, cioè che in $[a,b]$ siano illimitate al più in un numero finito di punti c_i ($i = 1,\ldots,n$); basta considerare la funzione negli intervalli $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$,…, $[c_i,c_{i+1}]$, …, $[c_n,b]$ e in essi ripetere le considerazioni fatte sopra.

<u>ESEMPIO 22</u> – Calcolare $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$.

La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ è definita per $x < 2$ ed è illimitata per $x = 2$. $f(x)$ è quindi integrabile in ogni intervallo del tipo $[0, 2 - \varepsilon]$ con $0 < \varepsilon < 2$. Applicando la definizione si ha:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left|-2\sqrt{2-x}\right|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} .$$

Pertanto l'integrale converge.

◊

<u>ESEMPIO 23</u> – Verificare che $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ diverge

La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ è continua nell'intervallo $]0,1]$ ed è illimitata per $x = 0$. Pertanto:

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{0+\delta}^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{\delta\to 0^+} \left|\frac{-2}{\sqrt{x}}\right|_\delta^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-2+\frac{2}{\sqrt{\delta}}\right) = +\infty .$$

Pertanto l'integrale diverge.

◊

<u>ESEMPIO 24</u> – Stabilire se $\int_{-2}^2 \frac{1}{x+1}dx$ converge o meno.

La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x+1}$ è definita e continua per $x \neq -1$ ed è illimitata per $x \neq -1$. Per determinare la convergenza dell'integrale dato, basta stabilire se $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+1}dx$ e $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x+1}dx$ convergono. Calcoliamo:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-2}^{-1-\varepsilon} \frac{1}{x+1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left|ln|x+1|\right|_{-2}^{-1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(ln(\varepsilon)-ln1\right) = -\infty$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x+1}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{-1+\delta}^{2} \frac{1}{x+1}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left|ln|x+1|\right|_{-1+\delta}^{2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(ln(3)-ln(\delta)\right) = +\infty$$

Pertanto l'integrale diverge.
Si noti che se invece di calcolare i separatamente i due limiti precedenti li avessimo calcolati contemporaneamente ponendo ε = δ, avremmo avuto:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\int_{-2}^{-1-\varepsilon} \frac{1}{x+1}dx + \int_{-1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x+1}dx\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\left|ln|x+1|\right|_{-2}^{-1-\varepsilon} + \left|ln|x+1|\right|_{-1+\varepsilon}^{2}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(ln\,\varepsilon - ln1 + ln3 - ln\,\varepsilon\right) =$$
$$= ln3$$

Il valore così ottenuto non è il valore dell'integrale, ma viene detto *valore principale di Cauchy* dell'integrale dato. Geometricamente rappresenta l'area della regione compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle x e le rette $x = 0$ e $x = 2$.

◊

<u>ESEMPIO 25</u> – Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathrm{R}^+ ,$$

se ne vuol studiare l'integrabilità in un intervallo $[a,b]$ con $b > a$ al variare di α. La funzione $f(x)$ è infinita per $x \to a^+$, è continua in $]a,b]$ ed ammette come primitive le funzioni: $F(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ se α≠1 e $F_1(x) = ln(x-a)$ se α=1.

Per $\alpha \neq 1$ si ha quindi

$$L = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left|\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{a+\delta}^{b} = \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\delta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)$$

Si osservi che se è $-\alpha+1 > 0$, ossia $\alpha < 1$, $\lim_{\delta\to 0^+}\delta^{-\alpha+1} = 0$, mentre se è $-\alpha+1 < 0$, ossia $\alpha > 1$, $\lim_{\delta\to 0^+}\delta^{-\alpha+1} = +\infty$. Si ha quindi:

$$L = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & se \quad 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & se \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

Si noti poi che se $\alpha \le 0$, la funzione integranda, non sarebbe infinita $x \to a$ e l'integrale in $[a,b]$ non sarebbe più improprio.

Per $\alpha = 1$ si ha:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} \frac{1}{(x-a)}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left|ln(x-a)\right|_{a+\delta}^{b} = \lim_{\delta\to 0^+}\left(ln(b-a) - ln\,\delta\right) = +\infty .$$

Si può quindi concludere che la funzione $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha}}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo [a,b], con $b > a$, per $0 < \alpha < 1$e non lo è per $\alpha \geq 1$:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx = \begin{cases} converge & per \quad \alpha < 1 \\ diverge & per \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

e, per $\alpha > 1$ si ha $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$.

Conclusioni del tutto analoghe valgono per la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$$

◊

7 – Criteri di convergenza per gli integrali impropri di secondo tipo.

Considereremo solo funzioni non negative in un intorno sinistro di b, che siano illimitate in $x = b$ e che risultino interabili in ogni intervallo del tipo [a, $b - \varepsilon$]

TEOREMA 1 (PRIMO CRITERIO DEL CONFRONTO) – Se in un intorno sinistro di $x = b$ le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono non negative e risulta

$$f(x) \leq g(x)$$

allora:

se $\int_a^b g(x)dx$ converge, anche $\int_a^b f(x)dx$ converge;

se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, anche $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

TEOREMA 2 (SECONDO CRITERIO DEL CONFRONTO) – Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative in un intorno sinistro di $x = b$ e si supponga che in tale intorno $g(x)$ non si annulli ed esista il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

allora:

1) Se $\int_a^b g(x)dx$ converge ed l è finito ($l \geq 0$), allora anche $\int_a^b f(x)dx$ converge.

2) Se $\int_a^b g(x)dx$ diverge ed l è non nullo (l finito o infinito), allora anche $\int_a^0 f(x)dx$ diverge.

Si osservi che nel caso in cui l sia finito e non nullo il teorema afferma che gli integrali di $f(x)$ e $g(x)$convergono entrambi o divergono entrambi.

Se nel teorema 2 si considera come funzione di confronto $g(x)=\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha}}$, ricordando quanto detto nell'esempio 25 si ha:

TEOREMA 3 – Sia $f(x)$ non negativa in un intorno sinistro di $x = b$, infinita di ordine α per $x \to b^-$.
Se è $0 < \alpha < 1$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.
Se è $\alpha \geq 1$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente.

Anche per questo teorema vale quanto detto nell'osservazione di pagina 9; per garantire l'integrabilità in $[a, b]$ non basta che $f(x)$ sia infinita per $x \to b^-$, di ordine inferiore al primo: occorre che esiste il numero positivo $\alpha < 1$, che ne esprime l'ordine.

ESEMPIO 26 – Stabilire se $\int_1^e \frac{1}{\ln x}dx$ è convergente.

La funzione integranda è infinita per $x \to 1^+$ ed è continua in $]1, e]$ dove assume valori positivi. Per $x > 1$ si ha: $\ln x < x-1$ (si osservi che la retta $y = x-1$ è la tangente alla curva $y = \ln x$ nel punto $x=1$) e quindi $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{\ln x}$. Poiché $\int_1^e \frac{1}{x-1}dx$ è divergente (vedi esempio 25) allora anche $\int_1^e \frac{1}{\ln x}dx$ è divergente.

◊

ESEMPIO 27 – Verificare se $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}dx$ è convergente o meno.

La funzione integranda $f(x) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$ è infinita per $x \to 0^+$, è continua e positiva in $]0,1[$, nulla per $x = 1$. Applichiamo il teorema 2 utilizzando come funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1-\delta}}$ ($0<\delta<1$) che, per l'esempio 25, è integrabile in $]0,1]$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\delta}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{(\delta-1)x^{\delta-2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\delta}x^{1-\delta} = 0$$

Dalla convergenza dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\delta}}dx$ segue la convergenza dell'integrale $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}dx$. Si dimostra inoltre che $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}dx = 1$. Infatti:

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{x}dx = -\int_0^1 \ln x dx = -\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \ln x dx = -\lim_{\delta\to 0^+}\left|x\ln x - x\right|_\delta^1 = -\lim_{\delta\to 0^+}(0-1-\delta\ln\delta+\delta) = 1$$

Nel calcolo del limite $\lim_{\delta\to 0^+}\delta\ln\delta$ si è utilizzata la regola di De L'Hopital.

◊

ESEMPIO 28 – Verificare la convergenza dell'integrale improprio $\int_2^3 \frac{x^5}{\sqrt[3]{x-2}}dx$.

La funzione integranda è infinita per $x=2$ ed è un infinito di ordine α = 1/2 < 1, infatti: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\dfrac{x^5}{\sqrt{x-2}}}{\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 32$. L'integrale dato è quindi convergente.

◊

8 – Criterio di integrabilità per le funzioni a segno non costante.

Sia $f(x)$ una generica funzione integrabile in ogni intervallo del tipo [*a*, *b* – ε] e che sia illimitata in *x* = *b*. Sussiste il seguente teorema

TEOREMA – Se $\int_a^b |f(x)|dx$ è convergente, allora l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è convergente.

Nel caso in cui $\int_a^b |f(x)|dx$ sia convergente si usa dire che la funzione $f(x)$ è *assolutamente integrabile* nell'intervallo [*a*,*b*] e che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è *assolutamente convergente*: in tal caso $f(x)$ è integrabile. Si noti che non vale il viceversa, cioè: *se un integrale improprio* (del secondo tipo) *è convergente, non è detto che converga assolutamente*.

ESEMPIO 29 – Determinare se è convergente o meno $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} sen \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

La funzione integranda è continua per *x* > 0 ed è illimitata per *x* = 0 e cambia di segno infinite volte in qualsiasi intorno destro dell'origine. Si ha:

$$|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}}\left|sen\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e poiché di $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ è convergente, converge anche $\int_0^1 |f(x)|dx$ e di conseguenza anche $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} sen \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

◊

9 – Integrali impropri che sono contemporaneamente di primo e di secondo tipo.

Concludiamo la trattazione degli integrali impropri osservando che a volte possono trovarsi integrali impropri che sono contemporaneamente del primo e del secondo tipo. Si chiarirà la questione con un esempio.

ESEMPIO 30 – Calcolare $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

Osserviamo innanzi tutto che la funzione integranda è continua e positiva per *x* > 1, per $x \to 1$ è infinita di ordine 1/2 < 1 e per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine 3/2 > 1. Quindi in base ai criteri visti

è integrabile sia in un intorno di $x = 1$, sia in un intorno di $+\infty$.
Si può anche calcolare il valore: sostituendo $\sqrt{x-1} = t$ si dimostra che $F(x) = 2arctg\sqrt{x-1}$ è una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$, si ha quindi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\substack{\delta\to0^+ \\ t\to+\infty}} \int_{1+\delta}^{t} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\substack{\delta\to0^+ \\ t\to+\infty}} \Big|2arctg\sqrt{x-1}\Big|_{1+\delta}^{t} = \lim_{\substack{\delta\to0^+ \\ t\to+\infty}} \left(2arctg\sqrt{t-1} - 2arctg\sqrt{\delta}\right) = \pi$$

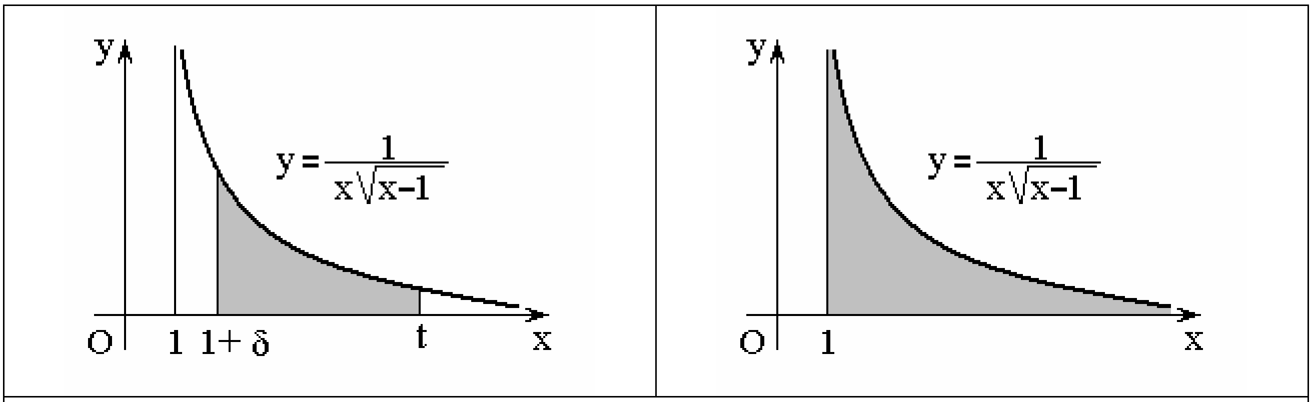

Fig. 5 – Significato geometrico dell'integrale improprio dell'esempio 30.

◊