Integrali definiti

1 – Integrale definito di una funzione in un intervallo chiuso e limitato

Uno dei problemi più importanti della matematica è il calcolo delle aree. Il problema è di facile soluzione se si tratta di un poligono, in quanto esso può essere decomposto in un certo numero di triangoli di cui si sa come calcolare l'area. Se si ha a che fare con un cerchio il problema è enormemente più complesso. Il problema della quadratura del cerchio, altro non è che la determinazione della sua area[i].
La procedura più semplice per determinare l'area del cerchio consiste nel considerare la successione costituita dalle aree dei poligoni regolari inscritti e quella delle aree dei poligoni regolari circoscritti. Come si può intuire, man mano che il numero dei lati dei poligoni inscritti aumenta (triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono, ecc.) le loro aree diventano sempre maggiori e si avvicinano sempre più a quella del cerchio. Per i poligoni circoscritti, invece, man mano che il numero dei lati aumenta le aree diminuiscono, ma l'area è sempre più vicina all'area del cerchio.

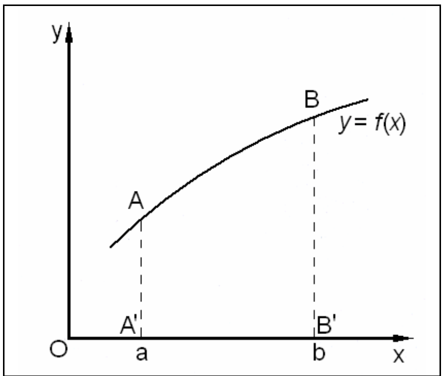

Figura 1 – Il trapezoide *A'ABB'*

Un modo del tutto analogo è quello che si utilizzerà per determinare l'area del trapezoide costituito dall'arco di curva $\overset{\frown}{AB}$, sulla curva di equazione $y = f(x)$, dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$ e dall'asse x (vedi figura 1).
Si consideri quindi una curva di equazione $y = f(x)$ in cui la funzione $f(x)$ sia continua e crescente[ii] in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Si divida l'intervallo in n parti di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ mediante i punti:

$$x_0 = a;\quad x_1 = a + \Delta x;\quad x_2 = a + 2\Delta x;\quad \ldots;\ x_k = a + k\Delta x;\ \ldots;\quad x_n = a + n\Delta x = b.$$

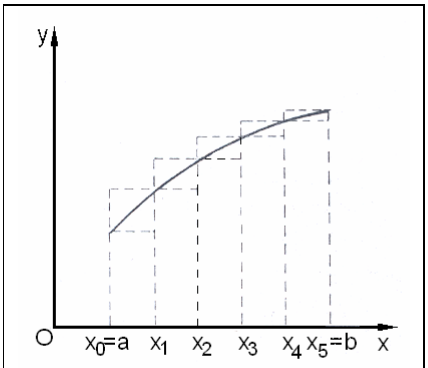

Figura 2 – Plurirettangoli inscritti e circoscritti ($n = 5$)

Si considerino quindi i plurirettangoli[iii] inscritti e quelli circoscritti al trapezoide (nella figura 2 l'intervallo $[a, b]$ viene diviso in 5 parti) che hanno per base i segmenti $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, . . ., $x_k - x_{k-1}$, . . . , $x_n - x_{n-1}$ e altezze rispettivamente $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$. Le aree di tali plurirettangoli sono:

[i] A rigore, il problema è quello di costruire, usando solo riga e compasso, un quadrato con la stessa area di un dato cerchio. Il problema risale all'invenzione della geometria, e ha tenuto occupati i matematici per secoli. Solo nel 1882 ne venne dimostrata l'impossibilità, anche se i geometri dell'antichità avevano afferrato molto bene, sia intuitivamente che in pratica, la sua intrattabilità. Si deve notare che è solo la limitazione ad usare una riga (non graduata) e un compasso che rende il problema difficile. Se si possono usare altri semplici strumenti, come ad esempio qualcosa che può disegnare una spirale archimedea, allora non è così difficile disegnare un quadrato ed un cerchio di area uguale. Una soluzione richiede la costruzione del numero $\sqrt{\pi}$, e l'impossibilità di ciò deriva dal fatto che π è un numero trascendente e quindi non-costruibile. La trascendenza di π venne dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882. Risolvere il problema della quadratura del cerchio, significa aver trovato anche un valore algebrico di π - il che è impossibile. Ciò non implica che sia impossibile costruire un quadrato con un'area molto vicina a quella del cerchio dato.
[ii] La crescenza della funzione non è affatto necessaria; si vedrà nel seguito che i ragionamenti valgono per qualunque tipo di funzione continua. Anche la continuità non è del tutto necessaria, ma questa generalizzazione non rientra nel programma che si intende svolgere.
[iii] Un plurirettangolo è una figura geometrica costituita dalla somma di rettangoli.

Area del plurirettangolo inscritto: $s_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$

Area del plurirettangolo circoscritto: $S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

È chiaro che se aumenta n (nella figura 3, n = 10), s_n cresce e S_n decresce.
Inoltre s_n non potrà mai essere maggiore dell'area S della regione, quindi s_n è una successione limitata crescente ($s_n < s_{n+1} < S$). S_n è invece una successione limitata decrescente ($S_n > S_{n+1} > S$). $\forall$ n si avrà inoltre

$$s_n < S < S_n.$$

Si dimostra che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

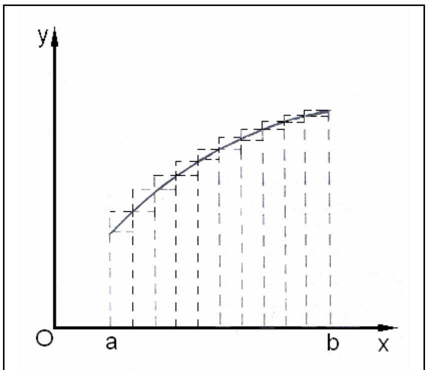

Figura 3 – Plurirettangoli inscritti e circoscritti (n = 10)

Si usa scrivere l'area S della regione nella forma

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che si legge "integrale tra a e b di f di x in di x". I numeri a e b si chiamano limiti o estremi di integrazione: a è l'estremo inferiore, b l'estremo superiore; x è la variabile di integrazione (che non è influente ai fini del risultato).
Quanto detto per una funzione continua e crescente, si può ripetere per una funzione decrescente (questa volta l'estremo destro sarà minimo e il sinistro massimo) e quindi per una funzione positiva (basta suddividere l'intervallo [a, b] in intervalli parziali in cui la funzione sia crescente, o decrescente o costante)
Una ulteriore estensione può essere fatta per le funzioni negative, cioè nel caso che il trapezoide sia al di sotto dell'asse x. In questo caso risultano negativi tutti i valori delle somme, perciò si conviene di considerare negativa la misura dell'area del trapezoide quando questo si trova sotto l'asse delle x.
Il valore dell'area di una figura, in senso geometrico, è però sempre espresso da un numero positivo, quindi sarà dato dal valore assoluto dell'integrale; si ha pertanto:

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Se infine in un intervallo [a, b] la funzione $f(x)$ non ha sempre lo stesso segno, si divide l'intervallo [a, b] in intervalli parziali in cui la funzione abbia lo stesso segno. Allora $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta la somma algebrica delle misure delle aree delle parti di piano che stanno sopra e di quelle che stanno sotto l'asse x. Ne segue che se si vuol calcolare l'area in senso geometrico, occorrerà determinare separatamente le aree delle parti di piano che stanno sopra e sotto l'asse delle x e sommare poi i valori assoluti. Si dimostra facilmente che l'area è sempre data da $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

La definizione data sopra può essere estesa a funzioni qualunque purché continue. Come sopra, si divide l'intervallo [a, b] in n intervalli [x_{k-1}, x_k] con k = 1 … n, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. In ciascuno di questi intervalli la funzione è continua e, per il teorema di Weierstrass[iv], ammette massimo assoluto M_k e minimo assoluto m_k. Si possono scrivere le seguenti somme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \qquad \text{e} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x$$

Si dimostra il seguente teorema:

<u>TEOREMA 1</u> – Le successioni delle somme integrali inferiori $s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x$ e delle somme integrali superiori $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x$, relative ad una funzione $f(x)$, continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, sono convergenti ed ammettono, per $n \to +\infty$, lo stesso limite:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n .$$

Il valore comune dei due limiti è, per definizione, l'integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$. Si indica con: $\int_a^b f(x)\,dx$.

È possibile considerare anche una somma integrale intermedia $T_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ dove $x_{k-1} < c_k < x_k$ e di conseguenza $m_k \le f(c_k) \le M_k$. Si dimostra che è anche $\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

Vengono enunciate alcune importanti proprietà dell'integrale definito.

<u>PROPRIETÀ 1</u>

Si pone per convenzione $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

<u>PROPRIETÀ 2</u>

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, cioè cambiando gli estremi di un integrale, l'integrale definito cambia segno.

<u>PROPRIETÀ 3</u>

Per ogni $c \in [a, b]$ si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

è facile persuadersi che questa proprietà vale anche se c non appartiene all'intervallo $[a, b]$. La proprietà si estende anche al caso in cui tra a e b ci siano più punti.

<u>PROPRIETÀ 4</u>

L'integrale definito è un operatore lineare. Si dimostra infatti che:

[iv] TEOREMA DI WEIERSTASS – Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ ammette massimo e minimo assoluti.

$$\int_a^b \left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx,$$

dove α e β sono due costanti.

PROPRIETÀ 5

Infine, poiché l'integrale è il limite di una somma, non è difficile rendersi conto che:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b \left|f(x)\right|dx.$$

DEFINIZIONE – Si chiama funzione integrale $F(x)$ di una funzione $f(x)$, continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, la funzione definita da:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

N.B. Non ha importanza come viene indicata la variabile sulla quale viene fatta l'integrazione. Se non genera confusione si può anche scrivere $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$.

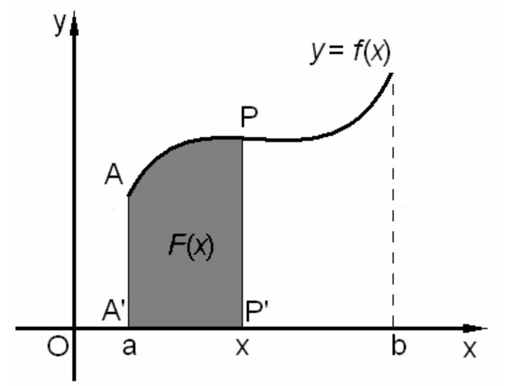

Figura 4 – La funzione integrale nel caso di una funzione positiva

2 – Teoremi fondamentali

Un'altra importante proprietà degli integrali definiti è espressa dal seguente teorema della media:

TEOREMA DELLA MEDIA – Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ per cui si ha

(1) $$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(c)$$

DIMOSTRAZIONE.

Essendo la funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstass, esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m. Per cui, $\forall\, x\in [a,b]$, si ha

$$m < f(x) < M.$$

Si divida quindi l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, per mezzo dei punti

$$x_0=a,\quad x_1,\quad x_2,\ldots,\ x_k,\ldots,\ x_n=b$$

si ottiene la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ negli intervalli parziali $[x_{k-1},x_k]$ e in ognuno di questi intervalli la funzione $f(x)$ assume massimo M_k e minimo m_k; è inoltre evidentemente che

$$m\le m_k \le f(c_k) \le M_k \le M$$

dove c_k è tale che $x_{k-1} \le c_k \le x_k$, con $k = 1 \dots n$. Si ha allora:

$$m \cdot \Delta x \le f(c_k) \cdot \Delta x \le M \cdot \Delta x.$$

Sommando su tutti gli intervalli si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta x$$

Da cui segue

$$nm\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \le nM\,\Delta x\,,$$

ma essendo $n \cdot \Delta x = (b - a)$, si ha

$$m(b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \le M(b-a)\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, si ha:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$ [v],

da cui segue:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M\ .$$

Poiché la funzione è continua in $[a, b]$, per il teorema di Bolzano[vi], esiste $c \in [a, b]$ per cui si ha $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$, ossia $\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\,f(c)$, che è appunto quanto si doveva dimostrare.

◊

<u>OSSERVAZIONE 1</u> – La (1) può essere scritta nella forma:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$$

Il valore $f(c)$ prende il nome di valor medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ e verrà indicato con $\overline{V}$. Il valor medio $\overline{V}$ si può pensare come il limite per $n \to +\infty$ della media aritmetica dei valori che la funzione $f(x)$ assume nei punti x_1, x_2, . . ., x_k, . . ., $x_n = b$ che dividono l'intervallo

[v] Si ricordi che limite per n $\to +\infty$ di una costante è la costante stessa.
[vi] Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora essa assume almeno una volta ogni valore compreso tra il minimo e il massimo.

$[a, b]$ in n parti uguali $\left(\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \rightarrow n = \dfrac{b-a}{\Delta x}\right)$. Cioè:

$$\overline{V} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{\frac{b-a}{\Delta x}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{b-a} = \frac{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_k)}{b-a} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to+\infty} S_n}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

<u>OSSERVAZIONE 2</u> – Il teorema della media espresso dalla (1) ha anche una facile interpretazione geometrica: se è $f(x) \geq 0$ nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste un punto c ($a \leq c \leq b$) tale che il rettangolo di base $b - a$ e altezza $f(c)$ è equivalente al trapezoide la cui area è $\int_a^b f(x)\,dx$. In tal modo il valor medio $\overline{V}$ della funzione $f(x)$ in $[a, b]$, risulta essere l'altezza del rettangolo equivalente al trapezoide ed avente per base l'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ (figura 5).

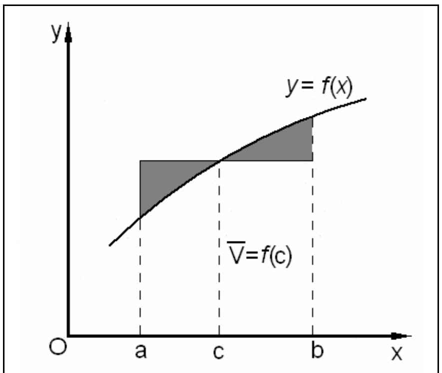

Figura 5 – Interpretazione geometrica del teorema della media

Si darà ora la dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale.

<u>TEOREMA FONDAMENTEALE DEL CALCOLO INTEGRALE</u> – Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è derivabile e per ogni $x \in [a, b]$ risulta

$$F'(x) = f(x).$$

DIMOSTRAZIONE
Si consideri $x \in [a, b]$, dovendo dimostrare che $F(x)$ è derivabile e che la derivata è proprio $f(x)$, si incrementi la x di Δx, in modo che sia $x + \Delta x \in [a, b]$, e si scriva il rapporto incrementale per la F; si ha:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

Poiché $x \in [a, x + \Delta x]$, per le proprietà 2 e 3, si ha che:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt .$$

Applicando a quest'ultimo integrale il teorema della media, si ha:

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta x \cdot f(c),$$

dove c è un opportuno punto che appartiene all'intervallo $[x, x + \Delta x]$. Si ha quindi:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(c).$$

Fissato un valore x, essendo $x \le c \le x + \Delta x$, si ha che, se $\Delta x \to 0$, allora anche $c \to x$. Per cui:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x).$$

L'esistenza del limite del rapporto incrementale della F, dimostra che F è derivabile e che:

$$F'(x) = f(x).$$

◊

La funzione $F(x)$ è derivabile (e quindi continua in $[a,b]$) ed è una primitiva di $f(x)$. L'insieme di tutte le primitive può essere indicato da $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$.

Sia quindi $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$ una qualunque primitiva di $f(x)$. Si ha: $\varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = c$ e $\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$. Si ricava quindi:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Questo risultato si scrive in genere nella forma

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[\varphi(x)\right]_a^b$$

Quanto detto implica la validità del seguente teorema

TEOREMA 2 – L'integrale definito di una funzione $f(x)$, continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, è uguale alla differenza tra il valore assunto da una sua qualsiasi primitiva nell'estremo superiore e quello assunto dalla stessa primitiva nell'estremo inferiore:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ESEMPIO 1 – Calcolare $\int_0^{\pi/2} sen^3 x \cos x dx$.

Dalle regole di integrazione immediata si ha:

$$\int_0^{\pi/2} sen^3 x \cos x dx = \left[\frac{1}{4} sen^4 x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left[sen^4\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen^4 0\right] = \frac{1}{4}$$

◊

ESEMPIO 2 – Calcolare $\int_0^1 xe^x dx$.

Integrando per parti si ha:

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[e^x\left(x-1\right)\right]_0^1 = e\left(1-1\right) - e^0\left(0-1\right) = 1$$

◊

3 – Area della parte di piano racchiusa tra due o più curve.

Si considerino ora due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e si supponga che i loro grafici si intersechino in due punti A e B di ascissa rispettivamente a e b. Si supponga inoltre che $\forall x \in [a,b]$ sia

$$f(x) \geq g(x)$$

e che la parte di piano a racchiusa tra le due curva appartenga al semipiano positivo delle ordinate (figura 6). Tenendo conto del significato geometrico dell'integrale definito, l'area della regione α è data dalla differenza tra l'area del trapezoide *A'ABB'* delimitato dal grafico di $f(x)$ e l'area del trapezoide *A'ABB'* delimitato dal grafico di $g(x)$. Si ha pertanto che

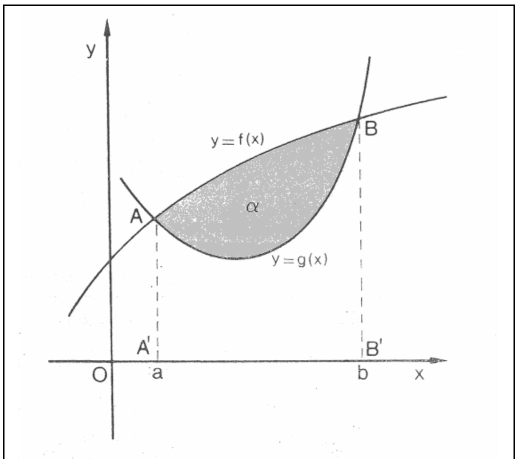

Figura 6 – Area della parte di piano racchiusa tra due o più curve.

$$\text{area}(\alpha) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

Si dimostra che la limitazione che la superficie α sia tutta nel semipiano positivo non è essenziale; l'unica cosa importante è che sia $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

ESEMPIO 3 – Determinare l'area della regione di piano delimitata dalla parabole γ_1 e γ_2 di equazioni:

$$\gamma_1: \quad y = x^2 - 3x + 2$$

$$\gamma_2: \quad y = -x^2 + x + 2$$

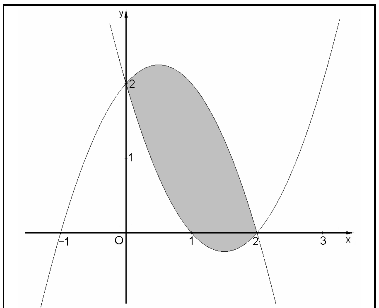

Figura 7 – Area della regione di piano tra due parabole dell'esempio 3.

In figura 7 viene riportato il grafico delle due parabole. Si trova facilmente, risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due curve, che queste si intersecano nei punti (0, 2) e (2, 0). Pertanto l'area della regione cercata è data da:

$$\int_0^2 \left[\left(-x^2+x+2\right)-\left(x^2+3x+2\right)\right]dx=\int_0^2\left(-2x^2+4x\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

◊

<u>ESEMPIO 4</u> – Determinare l'area di una ellisse di semiassi *a* e *b*.

Sia data una ellisse riferita al centro degli assi cartesiani (figura 8) la cui equazione è: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Data la simmetria della figura, la sua area è 4 volte l'area della regione compresa nel primo quadrante, per cui si ha:

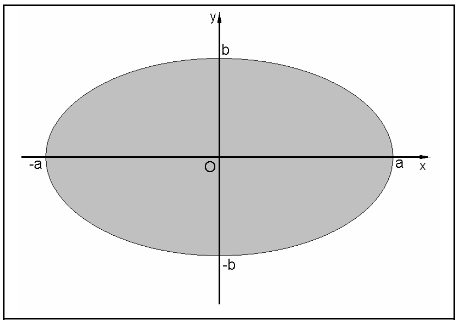

Figura 8 – Area dell'ellisse

area dell'ellisse = $4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Per il calcolo della primitiva poniamo $x = a\cdot sent$, da cui $dx = a\cdot cost\cdot dt$. Inoltre per x=0 si ha t=0 e per $x = a$ si ha $t = \pi/2$. Sostituendo si ottiene:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2sen^2t}\cdot a\,cos\,tdt=a^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-sen^2t}\cdot cos\,tdt=a^2\int_0^{\pi/2}cos^2tdt=$$

$$=a^2\left[\frac{t+sent\,cos\,t}{2}\right]_0^{\pi/2}=a^2\left[\frac{\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{0+sen0\,cos\,0}{2}\right]=a^2\frac{\pi}{4}$$

per cui si ha:

area dell'ellisse = $4\frac{b}{a}a^2\frac{\pi}{4}=ab\pi$.

Si osservi come l'espressione ora trovata si riduca all'area del cerchio nel caso in cui $a = b = r$.

◊

<u>OSSERVAZIONE 3</u> – Nel caso si debba determinare l'area di una regione di piano delimitata da tre o più curve, ci si può ricondurre ai casi già visti.

Siano $y = f(x)$, $y = g(x)$ e $y = h(x)$ le equazioni delle curve che delimitano la regione di cui si vuol determinare l'area e siano *a*, *b*, *c* le ascisse dei punti di intersezione delle curve (rispettivamente tra la prima e la terza, tra la seconda e la terza e tra la prima e la seconda; figura 9).

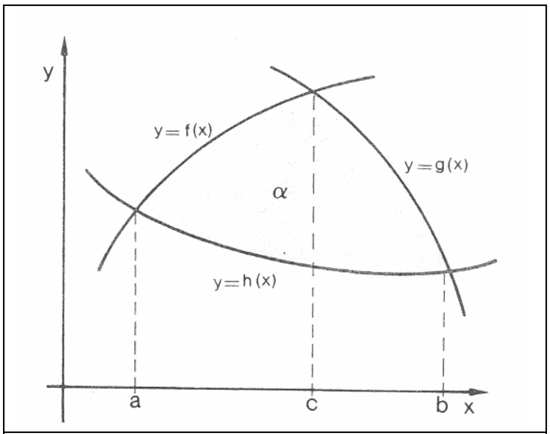

Figura 9 – Area di una regione di piano limitata da tre curve

Area(α) = $\int_a^c\left[f(x)-h(x)\right]dx+\int_c^b\left[g(x)-h(x)\right]dx$

Con semplici calcoli si dimostra che

Area(α) = $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b g(x)\,dx+\int_a^b h(x)\,dx$.

Come si può osservare, nel calcolo dell'area, si percorre il bordo della regione in senso orario e si calcolano gli integrali definiti delle funzioni che definiscono le curve del bordo tra le ascisse dei punti che sono estremi delle curve stesse.
Per una regione limitata da n curve $y = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, si ha:

$$\text{Area}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f_k(x)\,dx$$

$[a_k,b_k]$ sono le ascisse degli estremi dei tratti di curva di equazione $y = f_k(x)$, presi nel verso di percorrenza della curva, che deve essere in senso orario.

4 – Volume di un solido di rotazione

Sia $y = f(x)$ l'equazione di una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, e si supponga che sia $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Si consideri il trapezoide T delimitato dal grafico della funzione, dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dall'asse x e lo si faccia ruotare di un giro completo attorno all'asse x. Si ottiene un solido di rotazione il cui volume V può essere calcolato con l'integrale definito (figura 10). Per dimostrare ciò, si divida l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, per mezzo dei punti: $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b$.

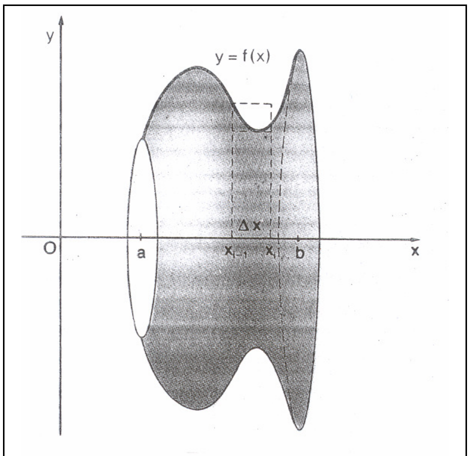

Figura 10 – Volume di un solido di rotazione.

Si considerino gli intervalli parziali $[x_{k-1},x_k]$, in ognuno di essi la funzione $f(x)$ assume massimo M_k e minimo m_k. Si considerino quindi i plurirettangoli inscritti e quelli circoscritti; nella rotazione questi plurirettangoli daranno origine a due pluricilindri, inscritto e circoscritto al solido di rotazione, ricordando l'espressione per il volume del cilindro e indicando con v_n il volume del pluricilindro inscritto e con V_n quello del pluricilindro circoscritto si avrà:

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \pi m_k^2 \Delta x = \pi \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta x$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi M_k^2 \Delta x = \pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta x$$

ricordando quanto già detto a proposito della somma integrale si ha che le espressioni scritte sono somme integrali inferiori e superiori per la funzione $y = \pi\left[f(x)\right]^2$. Ripetendo ragionamenti già fatti si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

che fornisce l'espressione per il calcolo del volume di un solido di rotazione.

ESEMPIO 5 – Utilizzando la relazione data sopra determinare il volume di un cono.

Siano r il raggio di base e a l'altezza del cono generato dalla rotazione del triangolo rettangolo OAB attorno all'asse x (figura 11).

La retta OB passa per l'origine ed ha equazione: $y = \frac{r}{a} x$.

Il volume del cono è quindi dato da:

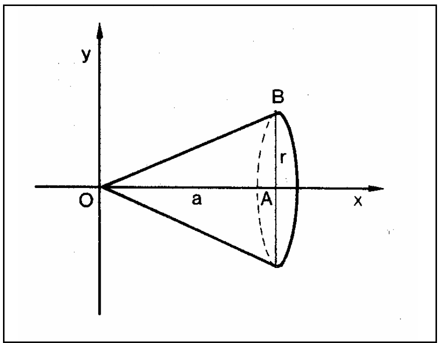

Figura 11 – Volume del cono

$$V = \pi \int_0^a \left[\frac{r}{a} x \right]^2 dx = \pi \frac{r^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \pi \frac{r^2}{a^2} \left| \frac{1}{3} x^3 \right|_0^a = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{a^2} a^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 a .$$

◊

ESEMPIO 6 – Determinare il volume del *toro*[vii].

Si consideri un cerchio e una retta esterna ad esso; si fissi un sistema di assi cartesiani in modo che l'asse x coincida con la retta e l'asse y sia la perpendicolare ad essa e passante per il centro del cerchio (figura 12). Sia $C = (0,b)$ il centro della circonferenza e r il suo raggio; l'equazione della circonferenza è quindi:

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ovvero

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

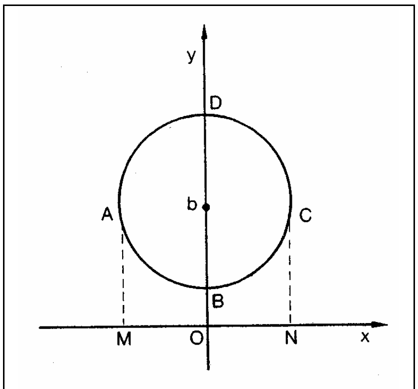

Figura 12 – Volume del toro

Il volume del toro si otterrà come differenza tra il volume V_1 del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse x il trapezoide $MADCN$ e il volume V_2 del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare il trapezoide $MABCN$. Si scriva quindi l'equazione della circonferenza ordinando secondo le potenze di y: $y^2 - 2by + b^2 + x^2 - r^2 = 0$ e si ricavi la y; si ha:

$$y = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\left(b^2 + x^2 - r^2\right)}}{2} = \frac{2b \pm \sqrt{\cancel{4b^2} \cancel{-4b^2} - 4x^2 + 4r^2}}{2} = b \pm \sqrt{r^2 - x^2} .$$

Nell'espressione ora trovata il segno + dà l'equazione dell'arco ADC; il segno – l'equazione dell'arco ABC. Si ha quindi:

$$V_1 = \pi \int_{-r}^{r} \left[b + \sqrt{r^2 - x^2} \right]^2 dx = 2\pi \int_0^r \left[b^2 + r^2 - x^2 + 2b\sqrt{r^2 - x^2} \right] dx =$$

$$= 2\pi \left| b^2 x + r^2 x - \frac{1}{3} x^3 + 2b \int \sqrt{r^2 - x^2} dx \right|_0^r = 2\pi \left(b^2 r + \frac{2}{3} r^3 + \frac{1}{2} \pi b r^2 \right)$$

[vii] Si dice toro il solido generato dalla rotazione di un cerchio intorno ad una retta del suo piano che non lo attraversi.

Il calcolo di $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ è del tutto analogo a quello fatto nell'Esempio 4. Analogamente si ha:

$$V_2 = \pi \int_{-r}^{r} \left[b - \sqrt{r^2 - x^2} \right]^2 dx = 2\pi \int_0^r \left[b^2 + r^2 - x^2 - 2b\sqrt{r^2 - x^2} \right] dx =$$

$$= 2\pi \left| b^2 x + r^2 x - \frac{1}{3}x^3 - 2b \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \right|_0^r = 2\pi \left(b^2 r + \frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{2}\pi b r^2 \right)$$

Si ricava quindi:

$$V = V_1 - V_2 = 2b(\pi r)^2.$$

Che si può scrivere anche nella forma:

$$V = 2\pi b \cdot (\pi r^2).$$

Questa formula mostra che: *la misura del volume del toro è data dal prodotto dell'area del cerchio generatore per la misura della circonferenza descritta, nella rotazione, dal centro del cerchio stesso*.

◊

La considerazione finale dell'esempio presedente è un caso particolare del teorema di Guldino che risulta particolarmente utile per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione e per quello delle coordinate del baricentro di una figura piana.

TEOREMA DI GULDINO – La misura del volume generato da una superficie piana che ruota attorno ad un asse del suo piano che non l'attraversa è dato dal prodotto della misura dell'area della superficie per la misura della lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro.

5 – Baricentro di una figura piana omogenea

Per il teorema di Guldino, per trovare le coordinate del baricentro $G = (x_G, y_G)$ di una figura piana basta considerare i volumi dei solidi di rotazione, una volta intorno all'asse x (per avere l'ordinata y_G) e un'altra volta intorno all'asse y (per avere l'ascissa x_G) e l'area della figura.

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\textit{Volume del solido di rotazione attorno ad } y}{2\pi \cdot \textit{Area della figura}} \\ y_G = \dfrac{\textit{Volume del solido di rotazione attorno ad } x}{2\pi \cdot \textit{Area della figura}} \end{cases}$$

<u>ESEMPIO 7</u> – Calcolare le coordinate del baricentro della parte finita di piano compresa tra le due parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ e $x = \frac{1}{2}y^2$ (figura 13).

Per la simmetria della figura si avrà $x_G = y_G$. Le due parabole si incontrano nell'origine e nel punto

(2,2). Per prima cosa si determini il volume del solido di rotazione attorno all'asse x. Si ha:

$$V = \pi\int_0^2 \left(\sqrt{2x}\right)^2 dx - \pi\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(2x - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \pi\left[x^2 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^2 = \frac{12}{5}\pi .$$

L'area della porzione di piano di cui si vuol determinare il baricentro è data da:

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

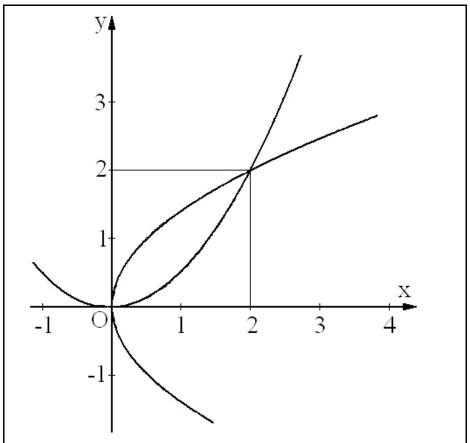

Figura 13 – Baricentro di una figura omogenea piana.

Per il teorema di Guldino si avrà: $2\pi\, y_G \cdot A = V$, per cui

$$y_G = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{12}{5}\pi}{2\pi\frac{4}{3}} = \frac{9}{10}.$$

◊

6 – Lunghezza di un arco di curva

Per determinare la lunghezza di un arco di curva si segue un ragionamento analogo a quello che, in geometria elementare, si segue per la determinazione della lunghezza di una circonferenza. Si arriva alla conclusione che la lunghezza di una curva viene vista come il limite per il numero di lati che tende all'infinito della lunghezza delle poligonali inscritte[viii] nell'arco di curva.

Consideriamo quindi una curva la cui equazione sia data da $y = f(x)$, con f funzione continua e derivabile, ci si propone di calcolare la lunghezza dell'arco di curva AB che ha per estremi i punti $A=[a, f(a)]$ e $B=[b, f(b)]$ (figura 14).

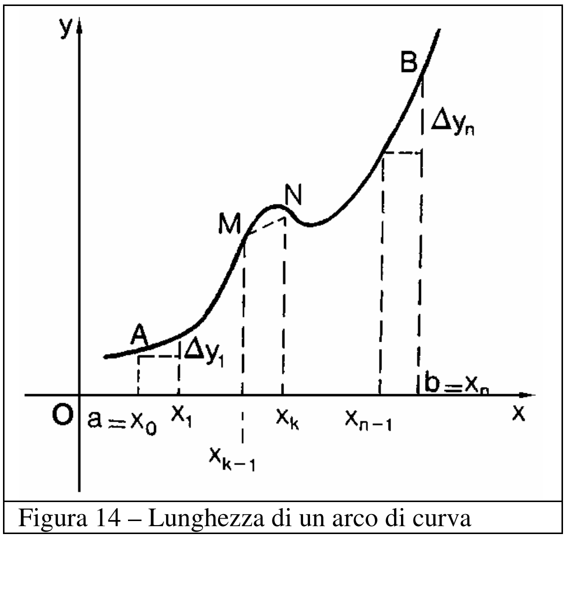

Figura 14 – Lunghezza di un arco di curva

Come al solito dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, per mezzo dei punti:

$$x_0 = a,\quad x_1,\quad x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b$$

e sia

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= f(x_1) - f(x_0)\\
\Delta y_2 &= f(x_2) - f(x_0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta y_k &= f(x_k) - f(x_{k-1})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta y_n &= f(x_n) - f(x_{n-1})
\end{aligned}$$

I punti della curva di ascissa x_0, x_1, x_2, . . ., x_k, . . ., x_n, sono i vertici di una poligonale inscritta

[viii] Una poligonale è inscritta in una curva che i suoi vertici sono punti della curva.

nell'arco AB.
Avendo supposto la funzione continua e derivabile nell'intervallo $[a,b]$, è possibile applicare il teorema di Lagrange alla funzione, relativamente a ciascun intervallo $[x_{k-1},x_k]$ e pertanto si può scrivere: $\Delta y_k = \Delta x \cdot f'(\overline{x}_k)$, essendo $\overline{x}_k$ un opportuno valore tale che $x_{k-1} \le \overline{x}_k \le x_k$. Si ha quindi:

$$\overline{MN} = \Delta L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[\Delta x \cdot f'(\overline{x}_k)\right]^2} = \sqrt{(\Delta x)^2\left[1 + f'(\overline{x}_k)\right]^2} =$$
$$= \Delta x\sqrt{1+\left[f'(\overline{x}_k)\right]^2}$$

La lunghezza della poligonale inscritta è quindi:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x\sqrt{1+\left[f'(\overline{x}_k)\right]^2}$$

e la lunghezza dell'arco risulterà essere:

$$L_{\widehat{AB}} = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x\sqrt{1+\left[f'(\overline{x}_k)\right]^2}\,.$$

Ponendo $G(\overline{x}_k) = \sqrt{1+\left[f'(\overline{x}_k)\right]^2}$, si tratta di calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x G(\overline{x}_k)$ e cioè:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b G(x)\,dx$$

ossia

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\,.$$

<u>ESEMPIO 8</u> – Determinare la lunghezza della circonferenza di raggio r.

Si consideri una circonferenza con centro nell'origine e raggio r, la sua equazione è: $x^2 + y^2 = r^2$, cioè: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Consideriamo la semicirconferenza situata nel semipiano delle ordinate positive, di equazione: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Gli estremi della curva saranno $A = [-r, 0]$ e $B = [r, 0]$. Inoltre $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Si ha quindi che la lunghezza della circonferenza è:

$$\ell = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx\,.$$

Ponendo $x = rt$, e quindi $dx = rdt$ e $x = -r \to t = -1$, $x = r \to t = 1$, si ha:

$$\ell = 2\int_{-1}^{1} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 t^2}} r dt = 2r\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2r \left| arcsent \right|_{-1}^{1} = 2r\left[arcsen(-1) - arcsent(1) \right] =$$

$$= 2r\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\pi r$$

◊

<u>ESEMPIO 9</u> – Determinare la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = 4 - x^2$, che ha per escutermi i punti A e B rispettivamente di ascissa 0 e 1.

$$L_{\widehat{AB}} = \int_0^1 \sqrt{1 + (-2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Da cui si ottiene

$$L_{\widehat{AB}} = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{4} \left| \left(2x\sqrt{4x^2 + 1} \right) + ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + ln\left(2 + \sqrt{5} \right) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} ln\left(2 + \sqrt{5} \right)$$

◊

In molte applicazioni la curva di cui si vuol determinare la lunghezza viene espresse in coordinate parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

con t parametro variabile in un intervallo $[a,b]$. Non è difficile dimostrare che l'espressione per il calcolo della lunghezza dell'arco di curva che ha per estremi $A = (x(a), y(a))$ e $B = (x(b), y(b))$ è data da:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{\left[x'(t) \right]^2 + \left[y'(t) \right]^2}\, dt\ .$$

ESERCIZI

1) Calcolare i valori dei seguenti integrali definiti:

a) $\int_0^1 \left(3x^2 - x + 2\right) dx$ $\left[\text{R. } \frac{5}{2}\right]$

b) $\int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right) dx$ $\left[\text{R. } \frac{e^x - 1}{e^x}\right]$

c) $\int_0^{\pi/2} 3sen2xdx$ $[\text{R. } 3]$

d) $\int_0^{\pi/4} sen^2 xdx$ $\left[\text{R. } \frac{1}{8}(\pi - 2)\right]$

e) $\int_0^{\pi/2} senx\cos xdx$ $\left[\text{R. } \frac{3}{8}\right]$

f) $\int_0^{\pi/2} xsenxdx$ $[\text{R. } 1]$

g) $\int_2^3 ln\, xdx$ $\left[\text{R. } ln\frac{27}{4} - 1\right]$

h) $\int_0^2 \frac{1}{4 + x^2} dx$ $\left[\text{R. } \frac{\pi}{8}\right]$

i) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$ $[\text{R. } 2ln2 - ln3]$

j) $\int_3^4 \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} dx$ $[\text{R. } 3ln3 - 5ln2]$

2) Determinare l'area della regione finita di piano tra le parabole di equazione $y = 4x^2$, $y = 2x^2 + 3$. $\left[\text{R. } 2\sqrt{6}\right]$

3) Determinare l'area della regione finita di piano tra le curve di equazione $y = 3x^2 + 5x - 1$, $y = 2x + 5$. $\left[\text{R. } \frac{27}{2}\right]$

4) Determinare l'area della regione finita di piano tra le curve di equazione $y = \frac{3}{x}$, $3x + 2y - 9 = 0$. $\left[\text{R. } \frac{9}{4} - 3ln2\right]$

5) Determinare l'area della regione finita di piano tra le curve di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$, $y^2 = x$. $\left[\text{R. } \frac{2}{3}\right]$

6) Determinare l'area della regione finita di piano, nel primo quadrante, compresa tra le curve di equazione $xy = 2$, $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x$. $\left[\text{R. } \frac{104}{27} - 2ln3\right]$

7) Trovare il volume determinato dalla rotazione intorno all'asse x della figura delimitata dall'asse x e dalla parabola di equazione: $y = -x^2 + 3x$. $\left[\text{R. } \frac{81}{10}\pi\right]$

8) Trovare il volume determinato dalla rotazione intorno all'asse x della figura delimitata dall'asse x e dalla curva di equazione: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$. $\left[\text{R. } \frac{729}{35}\pi\right]$

9) Determinare il volume del solido determinato dalla rotazione dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. $[\text{R. } 16\pi]$

10) Data la curva di equazione $y = x^2 - x^3$ determinare:

a) la misura dell'area della parte finita di piano S delimitata dalla curva e dall'asse x; $\left[\text{R. } \frac{1}{12}\right]$

b) la misura del volume del solido generato dalla rotazione della superficie S intorno all'asse x; $\left[\text{R. } \frac{1}{105}\pi\right]$

c) l'ordinata dal baricentro di S. $\left[\text{R. } \frac{2}{35}\right]$

11) Data la curva di equazione $y = x^3 - x^4$ determinare:

a) la misura dell'area della parte finita di piano S delimitata dalla curva e dall'asse x;
b) la misura del volume del solido generato dalla rotazione della superficie S intorno all'asse x;
c) l'ordinata dal baricentro di S.

12) Data la curve di equazione $xy = 4$ e $y = -3x^2 + 7x$ determinare:

a) la misura dell'area della parte finita di piano S racchiusa dai due archi;
b) la misura del volume del solido generato dalla rotazione della superficie S intorno all'asse x.

13) Utilizzando il teorema di Guldino determinare le coordinate del baricentro delle figure piane degli esercizi 7 e 8.

14) Calcolare il valor medio della funzione $y = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [1, e]. $\left[\text{R. } \frac{1}{e-1}\right]$

15) Calcolare il valor medio della funzione $y = \frac{x}{1+x^2}$ nell'intervallo $\left[0, \sqrt{e-1}\right]$. $\left[\text{R. } \frac{1}{2\sqrt{e-1}}\right]$

16) Calcolare il valor medio della funzione $y = \frac{\ln x}{x}$ nell'intervallo $[0, e]$. $\left[\text{R. } \frac{1}{2(e-1)}\right]$

17) Calcolare la lunghezza dell'arco della curva di equazione $y = x^2 - 1$ con $-1 \le x \le 1$. $\left[\text{R. } \sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)\right]$

18) Calcolare la lunghezza dell'arco della curva di equazione $y = \sqrt{4 - x^2}$ con $0 \le x \le 2$. $[\text{R. } \pi]$

19) Calcolare la lunghezza dell'arco della curva di equazione $y = 2x\sqrt{x}$ con $0 \le x \le 1$. $\left[\text{R. } \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)\right]$

20) Calcolare la lunghezza dell'arco della curva di equazione $\begin{cases} x = 2 sen t \\ y = 2 cos t \end{cases}$ con $\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}$. $\left[\text{R. } \frac{\pi}{3}\right]$