Integrali indefiniti

1 – Generalità

Si è visto come, data una funzione di equazione $y = f(x)$, si possa trovare la sua derivata prima $f'(x)$. Si è anche osservato che esiste una condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché una funzione sia derivabile: la funzione deve essere continua.[i] In ogni caso la funzione derivata è unica e l'operazione di derivazione può essere intesa come **un operatore** *D* che ad ogni funzione derivabile $f(x)$ associa, in modo unico, la sua derivata $f'(x)$.
Date $f(x)$ e $g(x)$, due funzioni derivabili, e α e β, due numeri reali, è noto che:

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha D[f(x)] + \beta D[g(x)],$$

cioè la derivata di una combinazione lineare di funzioni derivabili è uguale alla combinazione lineare delle derivate delle funzioni. Per tale motivo si dice che la derivata è un **operatore lineare**.

Come si sa dalla meccanica, data una funzione $x = x(t)$ che esprime la posizione di un punto in funzione del tempo, la velocità istantanea del punto è data da $v = v(t) = x'(t)$; la velocità è la derivata della posizione fatta rispetto al tempo. Inoltre si ha anche che l'accelerazione istantanea è $a = a(t) = v'(t) = x''(t)$, la derivata prima della velocità e quindi la derivata seconda della posizione[ii].
Consideriamo il seguente problema: data una forza $F = F(t)$, variabile nel tempo, applicata ad un punto materiale di massa *m*, si vuol sapere qual è la velocità con cui si muove questo punto. Dal secondo principio della dinamica si sa che $F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$, quindi la risoluzione del nostro problema consiste nel determinare una funzione (la velocità *v*) la cui derivata è nota (è data dal rapporto *F*/*m*).
In molti settori della matematica applicata questo è un problema molto importante.

Nel seguito questo problema verrà trattato in generale; esso consiste nel determinare tutte le funzioni la cui derivata sia uguale ad una funzione assegnata $f(x)$.

Si dà la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1 – Si dicono primitive di una funzione assegnata $f(x)$ tutte le funzioni la cui derivata è $f(x)$.

[i] Una funzione derivabile è continua, mentre una funzione continua non è necessariamente derivabile (per esempio $y = |x|$)

[ii] In fisica per indicare la derivata prima si usa mettere un punto sopra la lettera che indica la funzione, ovviamente per la derivata seconda si mettono due punti; così la velocità può essere indicata con $\dot{x}$ e l'accelerazione con $\ddot{x}$. Un altro modo per esprimere l'operatore derivata di una funzione nella variabile *x* è $\frac{d}{dx}$. Più in generale l'operatore di derivata di ordine superiore può essere scritto nella forma $\frac{d^n}{dt^n}$.

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, cioè

$$F'(x) = f(x).$$

È facile osservare che anche $F(x) + c$, dove c è una costante arbitraria, è una primitiva di $f(x)$ [iii]. D'altra parte se $F(x)$ e di $G(x)$ sono due primitive della stessa funzione $f(x)$, si ha:

$$F'(x) = G'(x)$$

e quindi

$$G(x) = F(x) + c.$$

Da ciò segue che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, $F(x) + c$ è la primitiva più generale, cioè rappresenta tutte le funzioni la cui derivata è $f(x)$.

Si dà la seguente definizione:

<u>DEFINIZIONE 2</u> – Si chiama integrale indefinito di $f(x)$ e si rappresenta con il simbolo $\int f(x)\,dx$, che si legge "integrale di effe di x in di x", la primitiva generale $F(x) + c$. La funzione $f(x)$ si chiama funzione integranda.

Per definizione si pone dunque:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{se e solo se} \quad F'(x) = f(x).$$

La definizione data mette in evidenza che:

1) L'integrale indefinito di $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$, cioè l'insieme di tutte e sole le funzioni la cui derivata è $f(x)$.
2) L'integrale indefinito può essere visto come operatore inverso della derivata (in alcuni casi si indica anche con D^{-1} oppure I) perché associa ad una funzione (integranda) $f(x)$ la famiglia di tutte e sole le funzioni la cui derivata è la $f(x)$ stessa: $I[f(x)] = F(x) + \mathrm{c}$.

Dalla definizione seguono alcune relazioni notevoli tra integrale indefinito, derivata e differenziale:

a) $D\left[\int f(x)\,dx\right] = D\left[F(x) + c\right] = F'(x) = f(x)$

b) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = d\left[F(x) + c\right] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$

c) $\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x)\,dx$

Mentre la derivata di una funzione continua può non esistere in qualche punto, si può invece dimostrare che di ogni funzione continua in un insieme esistono sempre le primitive; non è detto però che si sia sempre in grado di determinarle.

[iii] Basta ricordare che la derivata di una costante è zero.

2 – Integrazione per decomposizione

L'integrale indefinito è un operatore lineare, infatti si può dimostrare che se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue e α e β due numeri reali, allora:

$$\int\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx\,.$$

Per integrazione di una funzione si intende tutte quelle tecniche di calcolo che permettono di determinare le primitive della funzione data.
La linearità dell'integrale è una di queste tecniche; data infatti una funzione $f(x)$ decomponibile nella somma di più funzioni di cui si sappia calcolare la primitiva, sia cioè

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),$$

allora si ha:

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\ldots+\int f_n(x)\,dx\,.$$

In questo caso si parla di integrazione per decomposizione.

3 – Integrazione immediata

Si parla di integrazione immediata quando la funzione integranda è la derivata di una funzione nota.
La tabella 1 riporta alcune regole di integrazione immediata.

$\int dx$	$x+c$		$\int\frac{1}{cos^2 x}dx$	$tgx+c$
$\int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$ con $\alpha\neq-1$		$\int\frac{1}{1+x^2}dx$	$arctgx+c$
$\int\frac{1}{x}dx$	$ln\lvert x\rvert+c$		$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\begin{cases}arcsenx+c\\-arccosx+c\end{cases}$
$\int senxdx$	$-cos\,x+c$		$\int e^x dx$	e^x+c
$\int cosxdx$	$senx+c$		$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{ln\,a}+c$

Tabella 1 – Integrali immediati

<u>ESEMPIO 1</u> – Calcolare $\int\left(\frac{x^2}{3}+3x+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

Per decomposizione si ha:

$$\int\left(\frac{x^2}{3}+3x-\sqrt[3]{x}\right)dx=\frac{1}{3}\int x^2dx+3\int xdx-\int x^{\frac{1}{3}}dx$$

da cui segue

$$\int\left(\frac{x^2}{3}+3x-\sqrt[3]{x}\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3+3\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+c=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c$$

◊

<u>ESEMPIO 2</u> – Calcolare $\int\frac{x^4+2}{3x^4}dx$.

$$\int\frac{x^4+2}{3x^4}dx=\int\left(\frac{\cancel{x^4}}{3\cancel{x^4}}+\frac{2}{3x^4}\right)dx=\frac{1}{3}\int dx+\frac{2}{3}\int x^{-4}dx=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+c=\frac{1}{3}x-\frac{2}{9x^3}+c$$

◊

<u>ESEMPIO 3</u> – Calcolare $\int\frac{x+3}{x}dx$.

$$\int\frac{x+3}{x}dx=\int\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{3}{x}\right)dx=\int dx+3\int\frac{1}{x}dx=x+3ln|x|+c$$

◊

Allo scopo di generalizzare le regole date nella tabella 1 ricordiamo la regola di derivazione di una funzione composta: sia $h(x)=f\left(g(x)\right)$ si ha:

$$D\left[h(x)\right]=D\left[f\left(g(x)\right)\right]=D\left[f\left(g(x)\right)\right]\cdot D\left[g(x)\right]$$

Per ciò si ha, per esempio che se $\alpha\neq-1$,

$$\int\left[f(x)\right]^{\alpha}f'(x)dx=\frac{1}{\alpha+1}\left[f(x)\right]^{\alpha+1}+c.$$

Infatti:

$$D\left[\frac{1}{\alpha+1}\left[f(x)\right]^{\alpha+1}+c\right]=\frac{1}{\alpha+1}D\left[\left[f(x)\right]^{\alpha+1}+c\right]=\frac{1}{\cancel{\alpha+1}}\cancel{(\alpha+1)}\left[f(x)\right]^{\alpha}f'(x)=\left[f(x)\right]^{\alpha}f'(x).$$

In modo analogo si verificano le regole della tabella 2

$\int\left[f(x)\right]^{\alpha}f'(x)dx$	$\frac{1}{\alpha+1}\left[f(x)\right]^{\alpha+1}+c$ con $\alpha\neq-1$	$\int\frac{f'(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}dx$	$arctgf(x)+c$
$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$ln\lvert f(x)\rvert+c$	$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}}dx$	$\begin{cases}arcsenf(x)+c\\-arccos\,f(x)+c\end{cases}$
$\int\left[senf(x)\right]f'(x)dx$	$-cos\,f(x)+c$	$\int e^{f(x)}f'(x)dx$	$e^{f(x)}+c$
$\int\left[cosf(x)\right]f'(x)dx$	$senf(x)+c$	$\int a^{f(x)}f'(x)dx$	$\frac{a^{f(x)}}{ln\,a}+c$
$\int\frac{f'(x)}{cos^2f(x)}dx$	$tgf(x)+c$		

Tabella 2 – Integrali immediati

<u>ESEMPIO 4</u> – Calcolare $\int sen^3 x \cos x dx$.

In questo caso $f(x) = senx$, $f'(x) = \cos x$ e α = 3, per cui, dalla prima della tabella 2 si ottiene:

$$\int sen^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} sen^4 x + c .$$

◊

<u>ESEMPIO 5</u> – Calcolare $\int sen^3 x dx$.

Osservando che $sen^3 x = sen^2 x senx = \left(1 - \cos^2 x\right) senx = senx - \cos^2 x senx$ si ottiene:

$$\int sen^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c .$$

Generalizzando, si può calcolare l'integrale di qualunque potenza dispari di *senx*: $\int sen^{2n+1} x dx$ con n = 1,2,3,…. Basta osservare che $sen^{2n+1} x = \left(sen^2 x\right)^n senx = \left(1 - \cos^2 x\right)^n senx =$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^k \cos^{2k} x senx$, quindi essendo $\int \cos^{2k} x senx dx = -\frac{1}{2k+1} \cos^{2k+1} x + c$, si ha

$$\int sen^{2n+1} x dx = -\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cos^{2k+1} x + c .$$

Analogamente, per le potenze dispari di *cosx*, si ottiene:

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} sen^{2k+1} x + c$$

◊

<u>ESEMPIO 6</u> – Calcolare $\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$.

In questo caso $f(x) = 1 + x^3$, $f'(x) = 3x^2$ per cui, dalla seconda della tabella 2 si ottiene:

$$\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx = ln\left|1 + x^3\right| + c$$

◊

<u>ESEMPIO 7</u> – Calcolare $\int x\sqrt{x^2 + 3} dx$.

$$\int x\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}} + c .$$

Notare che si è moltiplicato per 1/2 l'integrale e per 2 la funzione integranda (operazioni che non modificano l'espressione), al fine di ottenere la derivata di x^2.

◊

<u>ESEMPIO 8</u> – Integrare la funzione $f(x) = \frac{senx}{\sqrt[3]{2 + 3\cos x}}$.

$$\int \frac{senx}{\sqrt[3]{2+3\cos x}}dx = \int senx \cdot (2+3\cos x)^{-\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{3}\int (2+3\cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-3senx)dx = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2+3\cos x)^2}+c$$

◊

ESEMPIO 9 – Calcolare $\int tgx dx$.

$$\int tgx dx = \int \frac{senx}{\cos x}dx = -\int \frac{-senx}{\cos x}dx = ln|\cos x| + c.$$

◊

ESEMPIO 10 – Calcolare $\int \frac{x+2}{x+3}dx$.

$$\int \frac{x+2}{x+3}dx = \int \frac{x+2+1-1}{x+3}dx = \int \left(\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+3}} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \int dx - \int \frac{1}{x+3}dx = x - ln|x+3| + c.$$

◊

ESEMPIO 11 – Calcolare $\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}dx$.

$$\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}dx = arctg(senx) + c.$$

◊

ESEMPIO 12 – Calcolare $\int \frac{1}{1+3x^2}dx$.

$$\int \frac{1}{1+3x^2}dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}x) + c.$$

◊

ESEMPIO 13 – Calcolare $\int \frac{1}{m^2+x^2}dx$.

$$\int \frac{1}{m^2+x^2}dx = \int \frac{1}{m^2\left(1+\frac{x^2}{m^2}\right)}dx = \frac{1}{m}\int \frac{\frac{1}{m}}{1+\left(\frac{x}{m}\right)^2}dx = \frac{1}{m}arctg\left(\frac{x}{m}\right) + c.$$

Questo risultato è suscettibile di un'utile generalizzazione:

$$\int \frac{1}{m^2+(x+k)^2}dx = \frac{1}{m}arctg\left(\frac{x+k}{m}\right) + c.$$

◊

ESEMPIO 14 – Calcolare $\int xe^{3x^2+1}dx$.

$$\int xe^{3x^2+1}dx = \frac{1}{6}\int (6x)e^{3x^2+1}dx = \frac{1}{6}e^{3x^2+1} + c.$$

◊

4 – Integrazione delle funzioni razionali fratte

Si consideri una funzione razionale fratta $y=\frac{N(x)}{D(x)}$, rapporto fra due polinomi in x e sia $N(x)$ di grado m e $D(x)$ di grado n.

Si supponga dapprima che sia $m \geq n$. In tal caso, eseguendo la divisione tra il polinomio $N(x)$ e il polinomio $D(x)$, si ottiene come quoziente un polinomio $Q(x)$ di grado $(m-n)$ e come resto un polinomio $R(x)$ di grado inferiore ad n; la funzione $y=\frac{N(x)}{D(x)}$ può scriversi nella forma:

$$y=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

e sarà quindi

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx=\int Q(x)dx+\int \frac{R(x)}{D(x)}dx .$$

Essendo un polinomio, $Q(x)$ si integra facilmente; ci si riconduce quindi a calcolare l'integrale $\int \frac{R(x)}{D(x)}dx$, di una funzione razionale fratta il cui numeratore è un polinomio di grado inferiore rispetto al denominatore.

<u>ESEMPIO 15</u> – Calcolare $\int \frac{4x^3+5}{2x+3}dx$.

Eseguendo la divisione:

$4x^3$			$+5$	$2x$	3		
$-4x^3$	$-6x^2$			$2x^2$	$-3x$	$9/2$	
/	$-6x^2$		$+5$				
	$6x^2$	$9x$					
	/	$9x$	$+5$				
		$-9x$	$-27/2$				
		/	$-17/2$				

si ha:

$$\int \frac{4x^3+5}{2x+3}dx=\int\left(2x^2-3x+\frac{9}{2}\right)dx-\int \frac{\frac{17}{2}}{2x+3}dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{17}{2}\int \frac{1}{2x+3}dx$$

L'integrale rimasto è facilmente riconducibile al tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$; si ha:

$$\int \frac{1}{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}dx=\frac{1}{2}ln|2x+3|+c$$

Si ha quindi:

$$\int \frac{4x^3+5}{2x+3}dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{17}{2}ln|2x+3|+c .$$

◊

Ci si ripropone ora di calcolare integrali di funzioni razionali fratte il cui polinomio al denominatore sia di secondo grado; ciò significa che al numeratore il polinomio è di grado zero o uno. Si tratta cioè di integrali del tipo:

$$\text{(I)} \int \frac{q}{ax^2+bx+c}dx \qquad \text{e} \qquad \text{(II)} \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$$

Come prima osservazione si noti che il (II) tipo di integrale può essere ricondotto sempre al (I); infatti

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = p\int \frac{x+\frac{q}{p}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aq}{p}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b-b+\frac{2aq}{p}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{p}{2a}\int \left(\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c} \right)dx = \frac{p}{2a} ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{p}{2a}\int \frac{\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}dx$$

<u>ESEMPIO 16</u> – Calcolare $\int \frac{2x+1}{2x^2+x-3}dx$.

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x+1)}{2x^2+x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+1-1+2}{2x^2+x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(4x+1)+1}{2x^2+x-3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4x+1}{2x^2+x-3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x^2+x-3}dx = \frac{1}{2} ln\left|2x^2+x-3\right| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x^2+x-3}dx$$

◊

Dato quindi un integrale del tipo (I) si presentano tre casi: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

<u>I caso $\Delta > 0$</u>

Dette x_1 e x_2 le radici reali dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ si ha:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

e la funzione integranda può essere decomposta nella somma di due frazioni elementari:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x+x_2}.$$

Le costanti A e B possono essere determinate applicando il principio di identità dei polinomi[iv] e il calcolo dell'integrale si riconduce ad integrali immediati.

<u>ESEMPIO 17</u> – Si completi il calcolo dell'integrale dell'esempio 16.

Resta da calcolare $\int \frac{1}{2x^2+x-3}dx$. Risolvendo l'equazione $2x^2+x-3=0$ è possibile scrivere

[iv] Due polinomi sono uguali se sono uguali i coefficienti dei termini dello stesso grado.

$$2x^2+x-3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)=(2x+3)(x-1)$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{2x^2+x-3}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}=\frac{(A+2B)x-A+3B}{(2x+3)(x-1)}$$

Deve quindi essere:

$$(A+2B)x-A+3B=1$$

e, per il principio di identità dei polinomi si ha:

$$\begin{cases}A+2B=0\\-A+3B=1\end{cases}\qquad \text{da cui segue}\qquad \begin{cases}A=-\dfrac{2}{5}\\B=\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Si ha quindi

$$\int\frac{1}{2x^2+x-3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{2}{2x+3}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}dx=-\frac{1}{5}ln\left|(2x+3)\right|+\frac{1}{5}ln\left|(x-1)\right|+c\,.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\int\frac{2x+1}{2x^2+x-3}dx&=\frac{1}{2}ln\left|2x^2+x-3\right|+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}ln|2x+3|+\frac{1}{5}ln|x-1|\right)+c=\\&=\frac{1}{2}ln\left|(2x+3)(x-1)\right|-\frac{1}{10}ln|2x+3|+\frac{1}{10}ln|x-1|+c=\\&=\frac{1}{2}ln\left|(2x+3)\right|+\frac{1}{2}ln\left|(x-1)\right|-\frac{1}{10}ln|2x+3|+\frac{1}{10}ln|x-1|+c=\\&=\frac{2}{5}ln\left|(2x+3)\right|+\frac{3}{5}ln\left|(x-1)\right|+c\end{aligned}$$

In questo caso si poteva evitare la parte dei calcoli svolta nell'ESEMPIO 16 e procedere direttamente nella scomposizione del trinomio nella forma:

$$\frac{2x+1}{2x^2+x-3}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}=\frac{(A+2B)x-A+3B}{(2x+3)(x-1)}$$

da cui si ricava

$$(A+2B)x-A+3B=2x+1$$

e, per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}A+2B=2\\-A+3B=1\end{cases}\qquad \text{da cui segue}\qquad \begin{cases}A=\dfrac{4}{5}\\B=\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

Si ha quindi

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+x-3}dx = \frac{2}{5}\int \frac{2}{2x+3}dx + \frac{3}{5}\int \frac{1}{x-1}dx = \frac{2}{5}ln\left|(2x+3)\right| + \frac{3}{5}ln\left|(x-1)\right| + c\,.$$

◊

ESEMPIO 18 – Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$.

Si pone $\displaystyle\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x(A+B)-2A-B}{(x-1)(x-2)}$

si ha $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$.

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = -ln\left|x-1\right| + ln\left|x-2\right| + c = ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c\,.$$

◊

II caso $\Delta = 0$

Detta $x_1 = x_2$ la radice doppia dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ si ha:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

e quindi si deve calcolare

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}dx = \frac{q}{a}\int (x-x_1)^{-2}dx = \frac{q}{a}\cdot\frac{1}{-2+1}(x-x_1)^{-2+1} + c = -\frac{q}{a}\cdot\frac{1}{(x-x_1)} + c\,.$$

ESEMPIO 19 – Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-6x+1}dx$.

$$\int \frac{1}{9x^2-6x+1}dx = \int \frac{1}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\int \left(x-\frac{1}{3}\right)^{-2}dx = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)} + c = \frac{-1}{3(3x-1)} + c$$

◊

ESEMPIO 20 – Calcolare $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-6x+9}dx$.

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2-6x+9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6+6+10}{x^2-6x+9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}dx + \frac{1}{2}\int \frac{16}{x^2-6x+9}dx =$$
$$= \frac{1}{2}ln\left(x^2-6x+9\right) + 8\int (x-3)^{-2}dx = \frac{1}{2}ln(x-3)^2 - \frac{8}{x-3} + c = ln\left|x-3\right| - \frac{8}{x-3} + c$$

◊

III caso $\Delta < 0$

Le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ non sono reali e per il calcolo dell'integrale (I) occorre procedere in modo diverso. Si ricordi che:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

Ed essendo $\Delta < 0$ l'espressione dentro la parentesi quadrata può essere considerata come la somma di due quadrati. Se si pone $k=\frac{b}{2a}$ e $m=\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ci si riconduce all'integrale dato nell'ESEMPIO 21

$$\int\frac{q}{ax^2+bx+c}dx=\frac{q}{a}\int\frac{1}{m^2+(x+k)^2}dx=\frac{q}{am}arctg\left(\frac{x+k}{m}\right)+c\,.$$

<u>ESEMPIO 22</u> – Calcolare $\int\frac{1}{x^2-6x+12}dx$.

Si verifica facilmente che $\Delta < 0$ e che si può scrivere $x^2-6x+12=(x-3)^2+3=(x-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, da cui

$$\int\frac{1}{x^2-6x+12}dx=\int\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2+(x-3)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right)+c$$

◊

<u>ESEMPIO 23</u> – Calcolare $\int\frac{5x+2}{x^2+4}dx$.

Si verifica facilmente che $\Delta < 0$ e che si può scrivere $x^2-6x+12=(x-3)^2+3=(x-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, da cui

$$\int\frac{5x+2}{x^2+4}dx=\int\frac{5x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx+2\int\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{5}{2}ln\left(x^2+4\right)+arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

◊

5 – Integrazione per sostituzione

In alcuni casi può essere utile introdurre una variabile ausiliaria per semplificare il calcolo. Vediamo con un esempio.

<u>ESEMPIO 24</u> – Si vuol calcolare $\int\frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Ponendo $t=\sqrt{x}$ si ha $x=t^2$, da cui segue che $dx = 2dt$. Sostituendo si ricava:

$$\int\frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{cos\,t}{\cancel{t}}2\cancel{t}dt=2\int cos\,tdt=2sent+c=2sen\sqrt{x}+c\,.$$

◊

In generale, se *f*(*x*) è la funzione da integrare, si pone $x = g(t)$, con *g* derivabile ed invertibile in un opportuno intervallo: sia $t = g^{-1}(x)$ la funzione inversa.
Differenziando si ha $dx = g'(t)\,dt$ e pertanto se *F* è una primitiva di *f*:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt = F(t) + c = F\left(g^{-1}(x)\right) + c$$

<u>ESEMPIO 25</u> – Calcolare $\int \frac{1}{1+senx}dx$.
Si pone $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ [v] da cui $x = 2arctgt$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Sostituendo si ha:

$$\int \frac{1}{1+senx}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{\cancel{1+t^2}}{1+t^2+2t} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}dt = 2\int (1+t)^{-2}\,dt =$$
$$= -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + c$$

◊

6 – Integrazione per parti

Si consideri il prodotto di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe derivabili $y = f(x)\cdot g(x)$. Differenziando il prodotto si ha:
$$dy = \left(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\right)dx = f'(x)\cdot g(x)\,dx + f(x)\cdot g'(x)\,dx = g(x)\cdot df(x) + f(x)\cdot dg(x)$$
da cui segue:
$$f(x)\cdot dg(x) = dy - g(x)\cdot df(x)$$
Integrando i due membri si ha:
$$\int f(x)\cdot dg(x) = \int dy - \int g(x)\cdot df(x)$$
cioè
$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$f(x)$ viene detto fattore finito e $dg(x) = g'(x)\,dx$ fattore differenziale. Si ha la seguente regola di integrazione per parti:

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI – L'integrale del prodotto di un fattore finito $f(x)$ per un fattore differenziale $g'(x)\,dx$ uguale al prodotto del fattore finito $f(x)$ per l'integrale $g(x)$

[v] In questo modo, si dimostra, $sent = \frac{2t}{1+t^2}$ e $cos\,t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

del fattore differenziale, meno l'integrale del prodotto dell'integrale trovato $g(x)$ per il differenziale $f'(x)dx$ del fattore finito.

<u>ESEMPIO 26</u> – Calcolare $\int xsenxdx$.

Si pone $f(x)=x$ e $g'(x)=senx$ da cui segue: $f'(x)=1$ e $g(x)=\int senxdx=-cos\,x$ e quindi utilizzando la regola, si avrà:

$$\int xsenxdx=-x\,cos\,x+\int cos\,xdx=-x\,cos\,x+senx+c.$$

◊

<u>ESEMPIO 27</u> – Calcolare $\int x^2 senxdx$.

Si pone $f(x)=x^2$ e $g'(x)=senx$ da cui segue: $f'(x)=2x$ e $g(x)=\int senxdx=-cos\,x$ e quindi utilizzando la regola, si avrà: $\int x^2 senxdx=-x^2\,cos\,x+2\int x\,cos\,xdx$. Per il calcolo dell'integrale rimasto, si può di nuovo utilizzare l'integrazione per parti:
Si pone $f(x)=x$ e $g'(x)=cosx$ da cui segue: $f'(x)=1$ e $g(x)=\int cosxdx=s\,enx$ e quindi si avrà:

$$\int x^2 senxdx=-x^2\,cos\,x+2\int x\,cos\,xdx=-x^2\,cos\,x+2\left(xsenx-\int s\,enxdx\right)=$$
$$=-x^2\,cos\,x+2xsenx+2\,cos\,x+c=\left(2-x^2\right)cos\,x+2xsenx+c$$

Più in generale, se si vuol calcolare $\int P_n(x)senxdx$ o $\int P_n(x)cosxdx$, dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado *n*, si può applicare la regola dell'integrazione per parti *n* volte, scegliendo come fattore finito il polinomio (e le sue derivate) e come fattore differenziale *senx* o *cosx*.

◊

<u>ESEMPIO 28</u> – Calcolare $\int xe^x dx$.

Si pone $f(x)=x$ e $g'(x)=e^x$ da cui segue: $f'(x)=1$ e $g(x)=\int e^x dx=e^x$ e quindi utilizzando la regola, si avrà: $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c=(x-1)e^x+c$.

Anche in questo caso, è possibile generalizzare: se si vuol calcolare $\int P_n(x)e^x dx$, dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado *n*, si può applicare la regola dell'integrazione per parti *n* volte, scegliendo come fattore finito il polinomio (e le sue derivate) e come fattore differenziale e^x (tenendo conto che l'integrale è sempre e^x)

◊

<u>ESEMPIO 29</u> – Calcolare $\int arctgx dx$.

Si pone $f(x) = arctgx$ e $g'(x) = 1$ da cui segue: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = \int dx = x$ e quindi utilizzando la regola, si avrà: $\int arctgx dx = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = xarctgx - \frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right) + c$.

◊

<u>ESEMPIO 30</u> – Calcolare $\int ln\, x dx$.

Si pone $f(x) = ln\, x$ e $g'(x) = 1$ da cui segue: $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \int dx = x$ e quindi utilizzando la regola, si avrà: $\int ln\, x dx = x\, ln\, x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = x\, ln\, x - x + c = x(ln\, x - 1) + c$.

◊

ESEMPIO 31 – Calcolare $\int sen^2 x dx$.

Per prima cosa si scrive $\int sen^2 x dx = \int senx \cdot senx dx$, quindi si pone $f(x) = senx$ e $g'(x) = senx$ da cui segue: $f'(x) = cos\, x$ e $g(x) = \int senx dx = -cos\, x$ e quindi si avrà:

$$\int sen^2 x dx = -senx\, cos\, x + \int cos^2 x dx = -senx\, cos\, x + \int \left(1 - sen^2 x\right) dx = -senx\, cos\, x + \int dx - \int sen^2 x dx =$$
$$= -senx\, cos\, x + x - \int sen^2 x dx$$

Da questa espressione segue che $2\int sen^2 x dx = x - senx\, cos\, x$ e quindi:

$$\int sen^2 x dx = \frac{x - senx\, cos\, x}{2} + c\, .$$

In modo analogo si dimostra che $\int cos^2 x dx = \frac{x + senx\, cos\, x}{2} + c$

◊

ESEMPIO 32 – Calcolare $\int sen^4 x dx$.

Per prima cosa si scrive $\int sen^4 x dx = \int sen^2 x \cdot sen^2 x dx$, quindi, ricordando che $sen^2 x = 1 - cos^2 x$, si ha $\int sen^4 x dx = \int sen^2 x\left(1 - cos^2 x\right) dx = \int sen^2 x dx - \int sen^2 x\, cos^2 x dx$. Per il primo integrale vedi esempio precedente, il secondo può essere integrato per parti ponendo $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = sen^2 x \cos x$ e quindi $f'(x) = -senx$ e $g(x) = \int sen^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} sen^3 x$; ne consegue che:

$\int sen^4 x dx = \int sen^2 x dx - \frac{1}{3} sen^3 x \cos x - \frac{1}{3} \int sen^4 x dx$, quindi

$\frac{4}{3} \int sen^4 x dx = \int sen^2 x dx - \frac{1}{3} sen^3 x \cos x$, ovvero: $\int sen^4 x dx = \frac{3}{4} \int sen^2 x dx - \frac{1}{4} sen^3 x \cos x$.

Con un procedimento analogo si può calcolare l'integrale di una qualunque potenza pari di *senx*. Per calcolare infatti $\int sen^{2n} x dx$ si procede come segue: $\int sen^{2n} x dx = \int sen^{2n-2} x \cdot sen^2 x dx$ quindi, ponendo $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$, si ha $\int sen^{2n} x dx = \int sen^{2n-2} x \cdot dx - \int sen^{2n-2} x \cdot \cos^2 x dx$. Il secondo integrale si integra per parti ponendo $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = sen^{2n-2} x \cos x$ e quindi $f'(x) = -senx$ e $g(x) = \int sen^{2n-2} x \cos x dx = \frac{1}{2n-1} sen^{2n-1} x$; ne consegue che:

$\int sen^{2n} x dx = \int sen^{2n-2} x dx - \frac{1}{2n-1} sen^{2n-1} x \cos x - \frac{1}{2n-1} \int sen^{2n} x dx$, quindi

$\int sen^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int sen^{2n-2} x dx - \frac{1}{2n} sen^{2n-1} x \cos x$. L'integrale rimasto a secondo membro è ancora l'integrale di una potenza pari di *senx*, ma di grado più basso. Iterando il procedimento si arriverà alla soluzione. Per esempio:

$$\int sen^8 x dx = \frac{7}{8} \int sen^6 x dx - \frac{1}{8} sen^7 x \cos x = \frac{7}{8}\left(\frac{5}{6} \int sen^4 x dx - \frac{1}{6} sen^5 x \cos x\right) - \frac{1}{8} sen^7 x \cos x =$$

$$= \frac{7}{8}\left[\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4} \int sen^2 x dx - \frac{1}{4} sen^3 x \cos x\right) - \frac{1}{6} sen^5 x \cos x\right] - \frac{1}{8} sen^7 x \cos x =$$

$$= \frac{7}{8}\left[\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4} \frac{x - senx \cos x}{2} - \frac{1}{4} sen^3 x \cos x\right) - \frac{1}{6} sen^5 x \cos x\right] - \frac{1}{8} sen^7 x \cos x =$$

$$= \frac{35}{128} x - \cos x \left(\frac{35}{128} senx + \frac{35}{192} sen^3 x + \frac{7}{48} sen^5 x + \frac{1}{8} sen^7 x\right) + c$$

In modo analogo si dimostra che $\int \cos^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int \cos^{2n-2} x dx + \frac{1}{2n} \cos^{2n-1} x senx$

◊

7 – Integrazione di particolari funzioni irrazionali

Sia da calcolare

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

con *f* unzione razionale di *x* e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Con semplici sostituzioni ci si può ricondurre al calcolo di integrali di funzioni razionali. Si procederà diversamente a seconda che sia $a > 0$ o $a < 0$.

<u>I caso $a > 0$</u>

Ponendo

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\cdot x$$

la funzione integrando diventa una funzione razionale in *t*.

ESEMPIO 33 – Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{k^2+x^2}}dx$.

Il coefficiente di x^2 è 1 quindi maggiore di zero, si pone $\sqrt{k^2+x^2} = t - x$. Elevando al quadrato si ottiene: $k^2 + \cancel{x^2} = t^2 - 2tx + \cancel{x^2} \rightarrow x = \frac{t^2-k^2}{2t}$. Sostituendo si ha: $\sqrt{k^2+x^2} = \frac{t^2+k^2}{2t}$ e $dx = \frac{t^2+k^2}{2t^2}dt$. Si ha quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2+x^2}}dx = \int \frac{2t}{t^2+k^2}\cdot\frac{t^2+k^2}{2t^2}dx = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln\left|x+\sqrt{k^2+x^2}\right| + c$$

◊

ESEMPIO 34 – Calcolare $\int \sqrt{2+x^2}\,dx$.

Si pone $\sqrt{2+x^2} = t - x$, si ha:

$$\int \sqrt{2+x^2}\,dx = \int \frac{\left(t^2+2\right)^2}{4t^3}dx = \int \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{8}t^2 + ln|t| - \frac{1}{2t^2} + c =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)^2 + ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right| - \frac{1}{2\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)^2} + c$$

◊

ESEMPIO 35 – Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-3x+1}}dx$.

Si pone $\sqrt{4x^2-3x+1} = t - 2x$, si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-3x+1}}dx = \int \frac{2}{4t-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4}{4t-3}dt = \frac{1}{2}ln|4t-3| + c =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|4\left(2x+\sqrt{4x^2-3x+1}\right)-3\right| + c$$

◊

ESEMPIO 36 – Calcolare $\int \sqrt{x^2-4x}dx$.

Si pone $\sqrt{x^2-4x} = t - x$, si ha:

$$\int \sqrt{x^2-4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{\left(t^2-4t\right)^2}{\left(t-2\right)^3}dx = \frac{1}{4}\int \left(t-2-8\frac{t^2-4t+2}{\left(t-2\right)^3}\right)dt = \frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}t-2\int \frac{t^2-4t+2}{\left(t-2\right)^3}dt\ .$$

Tenendo conto che nell'integrale rimasto si può scrivere:

$$\frac{t^2-4t+2}{\left(t-2\right)^3} = \frac{A}{\left(t-2\right)^3}+\frac{B}{\left(t-2\right)^2}+\frac{C}{t-2}$$

e che per l'identità dei polinomi si ricava $\begin{cases} A=-2 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases}$, si ha:

$$\int \frac{t^2-4t+2}{\left(t-2\right)^3}dt = \int \frac{-2}{\left(t-2\right)^3}dt + \int \frac{1}{t-2}dt = \frac{1}{\left(t-2\right)^2}+ln\left|t-2\right|+c$$

da cui segue:

$$\int \sqrt{x^2-4x}dx = \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)-\frac{2}{\left[\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)-2\right]^2}+$$

$$-2\,ln\left|\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)-2\right|+c$$

◊

ESEMPIO 37 – Calcolare $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+4x}}dx$.

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+4x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+4+11}{\sqrt{3x^2+4x}}dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{6x+4}{\sqrt{3x^2+4x}}dx + 11\int \frac{11}{\sqrt{3x^2+4x}}dx\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+4x}+$$

$$+\frac{11}{3}\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x}}dx$$

Per calcolare l'ultimo integrale si pone $\sqrt{3x^2+4x} = t-\sqrt{3}x$, si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x}}dx = \int \frac{1}{2+\sqrt{3}t}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}ln\left|2+\sqrt{3}t\right|+c$$

Quindi

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+4x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+4x}+\frac{11\sqrt{3}}{9}ln\left|\sqrt{3\left(3x^2+4x\right)}+\sqrt{3}x+2\right|+c$$

◊

II caso $a < 0$

Se $a < 0$, le radici del trinomio ax^2+bx+c devono essere senz'altro reali, perché, in caso contrario, il trinomi avrebbe, per qualsiasi valore di x, il segno di a e quindi negativo, e $\sqrt{ax^2+bx+c}$ non sarebbe una funzione reale. Siano quindi α e β le radici del trinomio, si ha:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

la determinazione dell'integrale $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ si può ridurre al calcolo dell'integrale di funzioni razionali di t con la sostituzione

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$$

ESEMPIO 38 – Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x-1}}dx$.

Si ha: $-2x^2+3x-1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$; poniamo $\sqrt{-2x^2+3x-1}=t\left(x-\frac{1}{2}\right)$, cioè $-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=t^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ o anche $-2(x-1)=t^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Da qui si ricava: $x=\frac{t^2+4}{2\left(t^2+2\right)}$, $dx=\frac{-2t}{\left(t^2+2\right)^2}dt$ e $\sqrt{-2x^2+3x-1}=\frac{t}{t^2+2}$. Si ha quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x-1}}dx=\int -\frac{t^2+2}{t}\cdot\frac{2t}{\left(t^2+2\right)^2}dt=-2\int\frac{1}{\left(t^2+2\right)}dt=-\sqrt{2}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c=$$
$$=arctg\sqrt{\frac{2(1-x)}{2x-1}}+c$$

◊

ESEMPIO 39 – Come è noto dagli integrali immediati $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsenx+c$. Utilizzando il procedimento illustrato nel precedente esempio, si può verificare tale identità.

Si pone $\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$, da qui si ricava: $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx=\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$ e $\sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}$. Sostituendo si ottiene:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=-2\int\frac{1}{1+t^2}dt=-2arctgt+c=-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c.$$

Si tratta ora di far vedere che $arcsenx$ e $-2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ differiscono per una costante. Si verifica facilmente che $arcsenx = \frac{\pi}{2} - arccos\,x$, poniamo quindi $\alpha = arccos\,x$ e $\beta = arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, quindi $x = cos\,\alpha$ e $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = tg\beta$, si ha che $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\,\alpha}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = tg\beta$ e quindi $\frac{\alpha}{2} = \beta$ ovvero $\alpha = 2\beta$. ne consegue che $arccos\,x = 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, da cui:

$$arcsenx = \frac{\pi}{2} - 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

◊