Successioni e serie numeriche

1 – Successioni numeriche

DEFINIZIONE 1 – Si chiama ***successione numerica*** una funzione f: $A \to \mathbb{R}$ con $A \equiv \mathbb{N}$. I termini della successione vengono indicati con una lettera dell'alfabeto latino (in genere una a) e con un indice numerico:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Utilizzando una scrittura sintetica la successione si può scrivere nella forma $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o, sottointendendo l'appartenenza di n ai numeri naturali, semplicemente $\{a_n\}$. a_n è detto ***termine generale*** della successione.

DEFINIZIONE 2 – Una successione numerica $\{a_n\}$ si dice ***limitata superiormente*** se esiste un numero $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione numerica $\{a_n\}$ si dice ***limitata inferiormente*** se esiste un numero $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \ge M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione numerica $\{a_n\}$ si dice ***limitata*** se esiste un numero $M \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 3 – Una successione numerica $\{a_n\}$ si dice ***non decrescente*** se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \le a_{n+1}$; se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n < a_{n+1}$ la successione si dice ***crescente***. Una successione numerica $\{a_n\}$ si dice ***non crescente*** se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha: $a_n \ge a_{n+1}$; se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n > a_{n+1}$ la successione si dice ***decrescente***.
Le successioni crescenti e quelle decrescenti si dicono anche ***monotone***.

ESEMPIO 1 – Si dimostri che la successione il cui termine generale è $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, è crescente.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, deve essere $a_n < a_{n+1}$, quindi deve essere:

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

sviluppando i calcoli si ottiene che per ogni $n > 0$ si ha: $(n-1)(n+1) < n^2$, ovvero $n^2 - 1 < n^2$.

◊

ESEMPIO 2 – Si dimostri che la successione il cui termine generale è $a_n = \dfrac{1}{n}$, è decrescente.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, deve essere $a_n > a_{n+1}$, quindi deve essere:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

che risulta vera per ogni $n > 0$.

◊

ESEMPIO 3 – Si dimostri che la successione il cui termine generale è $a_n = (-1)^n$, è limitata.
È facile rendersi conto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ i termini della successione o valgono 1 o valgono –1; pertanto risulta che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le a_n \le 1$ e quindi la successione è limitata.

◊

DEFINIZIONE 4 – Siano $\{n_k\}$ una successione crescente nell'insieme dei numeri naturali e $\{a_n\}$ una successione numerica; $\{a_{n_k}\}$ è detta ***sottosuccessione*** di $\{a_n\}$.

ESEMPIO 4 – Sia $a_n = \frac{1}{n}$ il termine generale della successione $\{a_n\}$ e sia $n_k = 2^k$ il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ costituito dai termini $\{2,4,8,16,...,2^k,...\}$. La successione il cui termine generale è $a_{n_k} = \frac{1}{2^k}$, è una sottosuccessione della successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

◊

DEFINIZIONE 5 – Si dice che una successione numerica $\{a_n\}$ ***converge*** ad $a \in \mathbb{R}$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, che dipende da ε, tale che per ogni $n > n(\varepsilon)$ risulta $|a_n - a| < \varepsilon$.
Si scrive: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, o semplicemente $a_n \to a$.

ESEMPIO 5 – Dimostrare che la successione il cui termine generale è $a_n = \frac{n+1}{n}$ converge a 1.
Fissato $\varepsilon > 0$ bisogna far vedere che la disuguaglianza $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ è soddisfatta con *n* maggiore di un numero che dipende da ε. Sviluppando i calcoli si ha: $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ da cui segue che la disuguaglianza è verificata per tutti gli *n* per i quali risulta $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ciò dimostra l'asserto, se si pone $n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

◊

ESEMPIO 6 – Dimostrare che la successione il cui termine generale è $a_n = \frac{1}{n}$ non converge a 1.
Fissato $\varepsilon > 0$ bisogna far vedere che la disuguaglianza $\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ non è soddisfatta con *n* maggiore di un numero che dipende da ε. Essendo $n \geq 1$, $\frac{1}{n} - 1 < 0$, quindi la disuguaglianza diventa: $1 - \frac{1}{n} < \varepsilon$ da cui segue che $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. Se $\varepsilon < 1$ si ha $n < \frac{1}{1-\varepsilon}$ che dimostra che la successione data non converge a 1.

◊

TEOREMA 1 – Ogni successione convergente è limitata.

Omettiamo la dimostrazione.

DEFINIZIONE 6 – Si dice che una successione $\{a_n\}$ ***diverge positivamente*** (***negativamente***) se, per ogni $K > 0$ esiste un numero $n(K) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n(K)$ risulta $a_n > K$ $(a_n < -K)$.

Si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right)$, o semplicemente $a_n \to +\infty$ $(a_n \to -\infty)$.

ESEMPIO 7 – Dimostrare che la successione il cui termine generale è $a_n = \sqrt{n}$ diverge positivamente.
Fissato $K > 0$ deve essere $\sqrt{n} > K$, ovvero, $n > K^2$; ponendo quindi $n(K) = K^2$ si ha la verifica dell'affermazione.

◊

È facile rendersi conto che se $a_n \to +\infty$, allora $-a_n \to -\infty$

TEOREMA 2 – Ogni successione numerica divergente positivamente (negativamente) non è limitata superiormente (inferiormente), ma è dotata di minimo (massimo).

DEFINIZIONE 7 – Una successione $\{a_n\}$ si dice ***regolare*** se ammette limite finito o infinito.

TEOREMA 3 – Se una successione numerica ammette limite, questo è unico.

DIMOSTRAZIONE
1. Una successione non può convergere e divergere contemporaneamente, quindi non può essere limitata e illimitata nello stesso tempo.
2. Una successione non può divergere positivamente e negativamente perché risulterebbe limitata inferiormente e nello stesso tempo non limitata inferiormente.
3. Se per assurdo fosse $a_n \to a$ e $a_n \to b$, con $a \neq b$, posto $2\varepsilon = |b-a|$, possiamo scegliere $n \in \mathbb{N}$ in modo che $|a_n - a| < \varepsilon$ e $|a_n - b| < \varepsilon$. Si ha quindi:
$$2\varepsilon = |b-a| = |(b-a_n)-(a_n-a)| \le |a_n-b| + |a_n-a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$
da cui segue $\varepsilon < \varepsilon$, ma ciò e assurdo.

TEOREMA 4 – (Confronto limite finito) Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni numeriche tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n \le b_n \le c_n$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$.

TEOREMA 5 – (Confronto limite infinito) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n \le b_n$.
- i) Se $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$.
- ii) Se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$.

Omettiamo la dimostrazione.

Date due successioni numeriche convergenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, ossia due successioni tali che $a_n \to a$ e $b_n \to b$, si dimostra che:
- i) $a_n \pm b_n \to a \pm b$
- ii) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0)$

Date due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dimostra che:

i) se $a_n \to a$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n \pm b_n \to \pm\infty$
ii) se $a_n \to a$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n \pm b_n \to \mp\infty$
iii) se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$
iv) se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n + b_n \to -\infty$
v) se $a_n \to a \neq 0$ e $b_n \to \infty$, allora $a_n \cdot b_n \to \infty$
vi) se $a_n \to a \neq 0$ e $b_n \to 0$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$
vii) se $a_n \to a$ e $b_n \to \infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Come nel caso delle funzioni risultano forme indeterminate i casi in cui si ha:

$$[+\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad \left[0^0\right], \quad \left[\infty^0\right], \quad \left[1^\infty\right]$$

gli ultimi tre casi si possono ricondurre alla forma $[0 \cdot \infty]$.
Infatti, date due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln a_n^{b_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{b_n \ln a_n}$ che può dar luogo alle forme indeterminate indicate.

Senza dimostrazione, si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Si dimostra che per la successione numerica $\{n^\alpha\}$, con α numero reale qualunque, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha>0 \\ 1 & \text{se} \quad \alpha=0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha<0 \end{cases}$$

ESEMPIO 8 – Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2}$.
Utilizzando la proprietà appena enunciata si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{7}{n^{\frac{5}{2}}}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{2}} = 0$$

◊

ESEMPIO 9 – Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

Risulta essere una forma indeterminata del tipo $[+\infty-\infty]$. Razionalizzando si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0$$

◊

TEOREMA 6 – Date due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n\to 0$, allora $a_n\cdot b_n\to 0$

ESEMPIO 10 – Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{senn}{n}$.

Si ha che $\{senn\}$ è una successione limitata, mentre $\frac{1}{n}\to 0$, quindi, per il teorema appena visto, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{senn}{n}=0$

◊

Confronti asintotici.

Siano date due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n\to\infty$ e $b_n\to\infty$, si possono avere le seguenti situazioni:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}0 & (\text{i})\\ l\text{ finito }\neq 0 & (\text{ii})\\ \pm\infty & (\text{iii})\\ \text{non esiste} & (\text{iv})\end{cases}$$

(i) Si dice che $\{a_n\}$ è infinito di ordine inferiore rispetto a $\{b_n\}$

(ii) Si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine

(iii) Si dice che $\{a_n\}$ è infinito di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$

(iv) Si dice che non sono confrontabili.

Siano date due successioni numeriche $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n\to 0$ e $b_n\to 0$, si possono avere le seguenti situazioni:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}0 & (\text{i})\\ l\text{ finito }\neq 0 & (\text{ii})\\ \pm\infty & (\text{iii})\\ \text{non esiste} & (\text{iv})\end{cases}$$

(i) Si dice che $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$

(ii) Si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello stesso ordine

(iii) Si dice che $\{a_n\}$ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $\{b_n\}$

(iv) Si dice che non sono confrontabili.

Nel caso in cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ si dice che le successioni sono asintotiche e si scrive $a_n \sim b_n$.

ESEMPIO 11 – Le successioni $a_n = 2n^2 + 3n + 1$ e $b_n = 2n^2$ sono asintotiche, infatti: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2} = 1$.

◊

ESEMPIO 12 – Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3}$.

Poiché $\frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3} \sim \frac{2n^3}{5n^3} = \frac{2}{5}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3} = \frac{2}{5}$

◊

ESEMPIO 13 – Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n}{2^{n+1}}$.

Poiché $\frac{2^n+n}{2^{n+1}} \sim \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

◊

ESEMPIO 14 – Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

◊

In generale si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $a > 1$.

2 – Serie numeriche

DEFINIZIONE – Data una successione numerica $\{a_n\}$, si chiama ***serie numerica*** dei termini a_n la quantità:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Sia

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0 \\
&s_1 = a_0 + a_1 \\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
&... \\
&s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \\
&...
\end{aligned}$$

s_n è detta ***somma parziale*** o ***ridotta ennesima*** della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e si indica con $\sum_{k=0}^{n} a_k$, con n =

0,1,2,….
Diremo che la serie converge, diverge o è irregolare, se la successione delle somme parziali è convergente, divergente o è irregolare; si scrive:

$$s_n \to s \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s\,.$$

ESEMPIO 15 – ***Serie geometrica***. Sia $a_n = q^n$ con $q \in \mathbb{R}$ e sia $q \neq 1$. Si vuol calcolare la somma della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Scriviamo la ridotta ennesima della serie e moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1-q$; con semplici calcoli si ottiene che

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Si ha quindi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se} \quad |q|<1 \\ +\infty & \text{se} \quad q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad q \leq -1 \end{cases}$$

Più in generale, se $|q|<1$, si ha: $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$.

Infatti: $\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + q^{k+3} + \ldots = q^k\left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\right) = q^k \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q}$

◊

ESEMPIO 16 – ***Serie armonica***. Non ne diamo la dimostrazione, ma si ha che la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

diverge positivamente.

◊

ESEMPIO 17 – ***Serie armonica generalizzata***. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha>1$ e diverge positivamente per $\alpha<1$.

◊

ESEMPIO 18 – Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

La serie data, detta serie di Mengoli[i], è un esempio di serie telescopica; si ha:

[i] Pietro Mengoli (Bologna, 1626 – Bologna, 1686) insigne matematico i cui studi anticipano di circa trent'anni quelli di Leibniz e Newton sul calcolo infinitesimale. Nella sua opera *Geometricae elementa speciosae* (1659), anticipò Cauchy relativamente al concetto di limite e di integrale definito.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

per cui:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

◊

TEOREMA – Condizione necessaria affinché una serie numerica converga è che $a_n \to 0$.

Si ha infatti che se la serie converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ e quindi $s_n \to s$; ne segue che:

$$a_n = (s_n - s_{n-1}) \to (s - s) = 0 .$$

2.1 – Serie a termini positivi

In questo paragrafo daremo alcuni criteri di convergenza per le serie a termini positivi, ossia serie per le quali si abbia: $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche a termini positivi, se, sa un certo valore di n in poi si ha $a_n \le b_n$, allora:

i) se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
ii) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

Confronto asintotico

Se $a_n \sim b_n$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere, ossia o convergono entrambe o divergono entrambe.

Criterio della radice (o di Cauchy)

Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, allora :

i) se $l > 1$ la serie diverge;
ii) se $l < 1$ la serie converge
iii) se $l = 1$ non si può dire nulla.

ESEMPIO 19 – La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^n}$, con $a \ge 0$ converge.

Infatti, per il criterio della radice si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0 < 1$

◊

ESEMPIO 20 – Determinare il carattere della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} a^n$, con $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha} a^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a n^{\frac{\alpha}{n}} = a$ [ii] da cui segue:

$$\begin{cases} a < 1 & \text{converge} \\ a > 1 & \text{diverge} \\ a = 1 & \begin{cases} \alpha < -1 & \text{converge} \\ \alpha \geq -1 & \text{diverge} \end{cases} \end{cases}$$

◊

<u>Criterio del rapporto (o di D'Alembert)</u>

Se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora :

i) se $l > 1$ la serie diverge;
ii) se $l < 1$ la serie converge
iii) se $l = 1$ non si può dire nulla.

ESEMPIO 21 – La serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ converge.

Infatti, per il criterio del rapporto si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$. Si dimostra inoltre che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

◊

<u>2.2 – Serie a termini di segno variabile – Assoluta convergenza</u>

Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente, allora anche $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. In questo caso si parla di assoluta convergenza.

ATTENZIONE: non è vero il contrario.

[ii] Si ricordi che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

ESEMPIO 22 – $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$.

Infatti $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ che è la serie armonica generalizzata che, come si è visto nell'esempio 17 converge per $\alpha > 1$.

◊

2.3 – Serie a termini di segno alterno – Criterio di Leibniz

Sia data la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il criterio di Leibniz afferma che, se: la successione $\{a_n\}$ è decrescente (ossia per ogni $n \in \mathbb{N}$ deve essere $a_n > a_{n+1}$) e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora la serie converge.

ESEMPIO 23 – $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ converge. Infatti la successione $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ è decrescente e converge a zero.

◊

ESEMPIO 24 – $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge. Infatti la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è decrescente e converge a zero.

◊

ESEMPIO 23 – $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ converge.

La successione $\left\{\frac{n-1}{n^2+n}\right\}$ è decrescente; infatti si ha che $\frac{n-1}{n^2+n} = \frac{n-1}{n(n+1)} > \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ per $(n-1)(n+2) > n^2$ ovvero per $n-2>0$. Inoltre $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n^2+n} = 0$.

◊