

Esercizi sulle successioni

- 1) Verificare il seguente limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{2n+1} = \frac{3}{2}$
- 2) Verificare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 - 5n) = +\infty$

Calcolare i seguenti limiti di successioni

- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^n}{1+3^{2n}}$ [R. 0]
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$ [R. 1/2]
- 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^{2n^2+1}}$ [R. 0]
- 6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$ [R. 0]
- 7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n})^{e^n}$ [R. 1/e]
- 8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!}$ [R. +∞]
- 9) Determinare il carattere della successione $a_n = (\lambda^2 - 2\lambda)^n$, al variare del parametro reale λ .

Esercizi sulle serie numeriche

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

- 10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$ [Converge; confronto con $1/n^{3/2}$]
- 11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ [Diverge; confronto con $1/n$]
- 12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3} - \ln n}$ [converge; confronto asintotico con $1/n^{4/3}$]
- 13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + 5}{n}$ [diverge; confronto asintotico con $1/n^{1/2}$]
- 14) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2+n} \sin^2 n$ [Converge; confronto + confronto asintotico $1/n^2$]
- 15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [Converge; criterio della radice]

- 16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ [Converge; criterio della radice]
- 17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$ [Diverge; criterio della radice]
- 18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ [Converge; criterio della radice]
- 19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ [Converge; criterio della radice]
- 20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ [Converge; criterio della radice]
- 21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [Diverge; criterio della radice]
- 22) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ [Converge; confronto]
- 23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ [Diverge; confronto]
- 24) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [Diverge; confronto]
- 25) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ [Converge; confronto]
- 26) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ [Diverge; rapporto]
- 27) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ [Converge; rapporto]
- 28) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ [Converge; rapporto]
- 29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{11}{10}\right)^n \frac{1}{n^5}$ [Diverge; rapporto]
- 30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ [Converge; rapporto]
- 31) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ [Converge; rapporto]

- 32) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$ [Converge; rapporto]
- 33) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$ [Converge; Leibnitz]
- 34) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{1}{n+1}}$ [Diverge; Leibnitz]
- 35) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{3-nx-n}$ [converge per $x > -1$; diverge per $x \leq -1$; criterio della radice]
- 36) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ [converge per $0 < x < 1$; rapporto]
- 37) Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a-1)^n}{n \cdot 2^n}$ al variare del parametro reale a . [Converge assolutamente per $-1 < a < 3$, converge per $a = -1$; diverge per gli altri valori di a]
- 38) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(2a-1)}$, con a numero reale e calcolarne la somma per i valori per i quali la serie converge. [La serie è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{\ln(2a-1)}$ e quindi . . . converge per $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$ e $a > \frac{1}{2} + \frac{e}{2}$; la somma della serie è $\frac{1}{\ln(2a-1)-1}$]
- 39) Determinare il carattere della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n [\ln \sqrt{n} - \ln(\sqrt{n}-1)]$ [converge semplicemente (crit. Leibnitz), non converge assolutamente (cfr asintotico con $\frac{1}{\sqrt{n}}$)]
- 40) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n (x-2)^n}{n!}$ [criterio del rapporto (converge per $2 - e^{-1} < x < 2 + e^{-1}$)].
- 41) Risolvere l’equazione: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{(2a-1)^n} = 6$ [$a = 3/2$; $a = 2$]
- 42) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\ln^n 2}$ [criterio della radice o del rapporto; diverge]
- 43) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^n$ [converge per $\ln(\sqrt{2}-1) < x < \ln(\sqrt{2}+1)$; diverge per $x \geq \ln(\sqrt{2}+1)$; oscilla per $x \leq \ln(\sqrt{2}-1)$]
- 44) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} x^{2n}$ [criterio del rapporto; converge per $|x| < 1$]

45) Individuare per quali valori di x la serie: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x} \right)^n$ converge e calcolarne la somma.

[converge per $1 < x < +\infty$; oscilla per $x = 1$; $s = \frac{x}{x - \sqrt{x} + 2}$]

46) Risolvere l’equazione $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(2+x)^n} = 8x$ [$x = 0$; $x = 4$]

47) Risolvere l’equazione: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2a-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a-2} \right)^n$

48) Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^2+3x+3}{-x-2}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

49) Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\ln x}{x-1}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

50) Risolvere l’equazione $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \left(\frac{x^2-1}{x-2} \right)^{n+1} = 2$.