Successioni e serie di funzioni

1 – Successioni di funzioni

DEFINIZIONE 1 – Si chiama successione di funzioni una relazione che ad un numero naturale n associa una funzione $f_n(x)$ definita in un insieme $A \subset \mathbb{R}$. Con il simbolo $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ indicheremo l'insieme delle funzioni

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

DEFINIZIONE 2 – Se per ogni $x \in A$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$, dei valori che ciascuna funzione della successione assume nel punto x, converge al valore $f(x)$, allora si dice che la successione converge puntualmente alla funzione $f(x)$. In altri termini si dice che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge puntualmente in A verso la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se per ogni $x \in A$, risulta: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, cioè se per ogni $x \in A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_{\varepsilon,x} \in N$ tale che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > n_{\varepsilon,x}$.

ESEMPIO 1 – La successione di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ converge a $f(x) = 0$.

◊

ESEMPIO 2 – La successione di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{1}{n} sen(nx)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ converge a $f(x) = 0$.

◊

ESEMPIO 3 – La successione di funzioni definita da $f_n(x) = x^n$ per ogni $0 \le x \le 1$ converge a $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

◊

Dalla definizione di limite puntuale e dalle proprietà delle successioni numeriche si ricavano le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ – Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni definite in $A \subset \mathbb{R}$ che converge puntualmente alla funzione $f(x)$, allora:

1) Per ogni $n \in N$, se $f_n(x) \ge 0$ per ogni $x \in A$, allora $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in A$.

2) Per ogni $n \in N$, se $f_n(x)$ è non decrescente o non crescente in A, allora $f(x)$ e non decrescente o non crescente in A.

Introduciamo una nuova definizione di convergenza per successioni di funzioni:

DEFINIZIONE 3 – Date le funzioni $f_n(x): A \to \mathbb{R}$ per $n \in$ N. Si dice che la successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente in A verso la funzione $f(x)$: $A \to \mathbb{R}$ se per ogni ε > 0 esiste $n_\varepsilon \in$ N tale che

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

$\forall n > n_\varepsilon$, qualunque sia $x \in A$.

TEOREMA 1 – Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni $f_n(x)$: $A \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in A ad $f(x)$ è che si abbia

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

dove

$$d_n = \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

Vale la seguente relazione tra i due tipi di convergenza per le successioni di funzioni:

TEOREMA 2 – Se una successione di funzioni $f_n(x)$: $A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente in A allora converge anche puntualmente. Non vale il viceversa.

ESEMPIO 4 – La successione di funzioni dell'esempio 1 non converge uniformemente. Poiché per ogni $n \in$ N fissato la funzione x è crescente, essa non è limitata e quindi l'estremo superiore $\sup_{x\in R}\left|\frac{x}{n}\right| = +\infty$.

◊

ESEMPIO 5 – La successione di funzioni dell'esempio 2 converge uniformemente. Infatti

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left|\frac{1}{n} sen(nx)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 .$$

◊

ESEMPIO 6 – La successione di funzioni dell'esempio 3 non converge uniformemente. Infatti , per ogni $0 \le x < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x<1}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x<1}\left|x^n\right| = 1 .$$

Inoltre per x = 1 si ha che $f_n(1) = f(1) = 1$ per ogni $n \in$ N, quindi l'estremo superiore non viene raggiunto in questo punto.
Consideriamo ora la stessa successione di funzioni definita però nell'intervallo [0, a[con 0 < a < 1. Allora per ogni a si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x<a}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x<a}\left|x^n\right| = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

Quindi la successione converge uniformemente.

◊

L'esempio 6 mette in evidenza il fatto che il tipo di convergenza per una successione di funzioni dipende anche dall'insieme di definizione della successione.

TEOREMA 3 – (della continuità del limite). Per ogni $n \in$ N sia $f_n(x)$: $A \to \mathbb{R}$. Sia $f_n(x)$ convergente uniformemente a $f(x): A \to \mathbb{R}$. Se ogni funzione $f_n(x)$ è continua in un punto $x_0 \in A$ allora anche la funzione limite $f(x)$ è continua in x_0.

Come conseguenza immediata del teorema 3 si ha che se la funzione limite di una successione di funzioni continue non è continua, allora la successione di funzioni non converge uniformemente. Per esempio, consideriamo la successione dell'esempio 6. Tutte le funzioni della successione sono continue su $\mathbb{R}$, ma la funzione limite non è continua per $x = 1$, di conseguenza la successione di funzioni non converge uniformemente.

Ricordando la definizione di funzione limitata in un intervallo, è possibile dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 4 – (della limitatezza del limite). Per ogni $n \in$ N sia $f_n(x): A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni che converge uniformemente a $f(x)$: $A \to \mathbb{R}$. Se ogni funzione $f_n(x)$ è limitata in A, allora anche la funzione limite $f(x)$ è limitata in A.

Nelle successioni di funzioni, sotto determinate condizioni, si può scambiare l'ordine tra le operazioni di integrazione oppure di derivazione con quella di passaggio al limite.
Valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA 5 – (di passaggio al limite sotto segno di integrale). Per ogni $n \in$N sia $f_n(x)$: [a, b] → $\mathbb{R}$ una successione di funzioni che converge uniformemente ad $f(x)$: [a, b] → $\mathbb{R}$. Se ogni funzione $f_n(x)$ è integrabile su [a, b] allora anche $f(x)$ è integrabile su [a, b] e si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Per il passaggio al limite sotto degno di derivata, la convergenza uniforme non basta, bisogna introdurre delle ipotesi aggiuntive.

TEOREMA 6 – (di passaggio al limite sotto segno di derivata). Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni derivabili e con derivata continua in [a, b] che converge uniformemente in [a, b] alla funzione $f(x)$. Sia $f_n'(x)$ la successione delle sue derivate e sia anch'essa uniformemente convergente. Allora $f(x)$: [a, b] → $\mathbb{R}$ è derivabile con derivata continua in [a, b] e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x) .$$

ESEMPIO 7 – Per $n \in$ N sia $f_n(x)$: [0, 1] → $\mathbb{R}$ data da $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ per $0 \le x \le 1$. Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx\left(1-x^2\right)^n = 0$$

quindi la funzione limite $f(x)$: [0, 1] → ℝ è identicamente nulla sull'intervallo [0, 1].

Calcoliamo l'integrale delle $f_n(x)$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx = -\frac{n}{2}\left[\frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}$$

Quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Mentre la funzione limite ha integrale uguale a zero. Quindi in questo caso abbiamo ottenuto che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Studiamo la convergenza uniforme della successione. Si deve calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\left|nx\left(1-x^2\right)^n\right|.$$

Le funzioni $f_n(x)$ sono tutte non negative e infinitamente derivabili, inoltre $f_n(0) = f_n(1) = 0$ per ogni $n \in$ N. Calcolo il massimo sull'intervallo [0, 1] imponendo l'annullamento della derivata prima

$$f_n{}'(x) = n\left[\left(1-x^2\right)^n - 2nx^2\left(1-x^2\right)^{n-1}\right] = n\left(1-x^2\right)^{n-1}\left(1-x^2-2nx^2\right) =$$

$$= n\left(1-x^2\right)^{n-1}\left[1-(1+2n)x^2\right]$$

Da cui segue che $f_n{}'(x) = 0$ per $x = \sqrt{\dfrac{1}{1+2n}}$ e quindi il valore massimo è $f\left(\sqrt{\dfrac{1}{1+2n}}\right) = \dfrac{n}{1+2n}\left(1-\dfrac{1}{1+2n}\right)^n$. Si ha quindi:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\le x\le 1}\left|nx\left(1-x^2\right)^n\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left[\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^{1+2n}\right]^{\frac{n}{1+2n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}e^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

La successione non converge uniformemente.

◊

ESEMPIO 8 – Per $n \in$ N si consideri la funzione continua $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{n} \le |x| \le 1 \\ n^2 x & 0 \le |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Il limite puntuale della successione di funzioni è: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0 < |x| \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Si noti anche che la successione di funzioni non converge uniformemente, in quanto il suo limite è una funzione discontinua per $x = 0$. Inoltre osserviamo che per ogni $n \in$ N si ha: $\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = 0$, mentre la funzione limite $f(x)$ non è integrabile sull'intervallo $[-1, 1]$.

◊

ESEMPIO 9 – Per $n \in$ N sia $f_n(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Il limite puntuale di questa successione è la funzione $f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Studiamo la convergenza uniforme. Dobbiamo quindi calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in R} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right|$$

tenendo conto del fatto che le funzioni $f_n(x)$ e $f(x)$ sono entrambe pari. Per $x = 0$ si ha che $f_n(0) - f(0) = \sqrt{\frac{1}{n}}$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x} = 0 .$$

La derivata prima è sempre negativa per $x > 0$, infatti

$$f_n{}'(x) - f\,'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 < 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Il massimo della differenza si trova quindi in $x = 0$, da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in R} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| f_n(0) - f(0) \right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0 .$$

La successione di funzioni converge uniformemente. Vediamo come si comporta la successione rispetto alla derivazione. Calcolando le derivate prime di ciascun elemento della successione si ottiene una nuova successione data da

$$f_n{}'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

La funzione limite $f(x) = |x|$ però non è derivabile per $x = 0$.

◊

ESEMPIO 10 – Consideriamo la successione dell'esempio 2. Per ogni $n \in$ N sia $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \frac{1}{n} sen(nx)$. Ogni elemento della successione è una funzione infinitamente derivabile e la derivata prima è:

$$f_n{}'(x) = cos(nx) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che la successione in esame converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. Risulta che per $x = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0) = 1$ mentre $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Quindi abbiamo verificato che in questo caso

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) \neq f'(x_0).$$

◊

Gli esempi riportati fanno capire che non sempre è possibile passare al limite sotto il segno di integrale o di derivata.

2 – Serie di funzioni

DEFINIZIONE 4 – Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni definite in $A \subset \mathbb{R}$, si chiama serie di funzioni la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x). \tag{1}$$

Sia ora $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ una funzione reale definita in A, allora le $s_k(x)$ definiscono una successione di funzioni e quanto è stato detto sopra per la successioni di funzioni si può ripetere per le serie di funzioni.

Per studiare la convergenza di una serie di funzioni vale il seguente importante teorema:

TEOREMA 7 – (Criterio di Weierstrass) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ con $f_n(x): A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una successione numerica a valori non negativi M_n tale che
(a) $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in A$ e per ogni $n \in$ N.
(b) La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ converge.
Allora, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su A.

Per applicare il criterio di Weierstrass è necessario costruire la successione M_n. Si noti che la più piccola successione M_n che soddisfa la condizione (b) è senz'altro data da

$$M_n = \sup_{x\in A} |f_n(x)|.$$

Quindi, se riusciamo a dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)|$ è una serie convergente, possiamo applicare il criterio di Weierstrass.

Una serie che soddisfa al criterio di Weierstrass si dice totalmente convergente.

TEOREMA 8 – Se la serie (1) converge totalmente in A, allora converge assolutamente per ogni $x \in A$ e uniformemente in A.

ESEMPIO 11 – Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ con $x \in [0,1]$. Si ha:

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, anzi si dimostra che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, allora si può applicare il criterio di Weierstrass e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ converge, di più, si dimostra che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}x$.

◊

ESEMPIO 12 – Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n+x^2n^3}$ con $x \in R$. In questo caso l'estremo superiore delle funzioni coincide con il massimo; per determinarlo calcoliamo la derivata prima:

$$f_n'(x) = \frac{n+x^2n^3-2x^2n^3}{\left(n+x^2n^3\right)^2} = \frac{n\left(1-x^2n^2\right)}{\left(n+x^2n^3\right)^2}$$

è facile vedere che le derivate si annullano per $x = \pm\frac{1}{n}$ ed essendo le funzioni dispari $\max_{x\in R} \left| \frac{x}{n+x^2n^3} \right| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2n^2}$ e poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass la nostra serie di funzioni converge uniformemente su tutto ℝ.

◊

Si ricordi che il criterio di Weierstrass è solo una condizione sufficiente per la convergenza uniforme. Consideriamo infatti il seguente esempio.

ESEMPIO 13 – Consideriamo la serie di funzioni costanti $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ con $x \in R$. In questo caso la convergenza uniforme equivale alla convergenza della serie numerica che è notoriamente convergente per il criterio di Leibnitz. Si noti però che $\sup_{x\in R} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ e sappiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non è convergente. Il criterio di Weierstrass in questo caso non aiuta.

◊

3 – Serie di potenze

Una classe di serie di funzioni particolarmente utili sono le serie di potenze che si presentano nella forma

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n$$

il valore x_0 si chiama centro della serie e la serie di potenze converge sempre per $x = x_0$ (converge 0), ma la serie potrebbe non convergere in nessun altro punto.

ESEMPIO 14 – Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (nx)^n$.
Si fissi il valore di $x \neq 0$ e sia n_0 tale che $|n_0 x| > 1$. Allora $n > n_0$, si ha

$$|nx|^n > |n_0 x|^n \to +\infty$$

Quindi se $x \neq 0$, il termine generale della serie non tende a zero, e quindi la serie non converge.

◊

Supponiamo ora che una serie di potenze converga in un punto $\xi \neq x_0$ e sia $r = |x_0 - \xi|$, allora la serie di potenze converge uniformemente in $\{x : |x - x_0| < r'\}$ per ogni $r' < r$.
Questo risultato implica che se una serie di potenze converge allora l'insieme su cui essa converge è un intervallo centrato in x_0 (non si esclude che si possa ridurre al solo x_0, oppure che sia tutta la retta reale). Questo viene detto intervallo di convergenza della serie di potenze e la sua ampiezza viene chiamata raggio di convergenza della serie e verrà indicato con R.
Se l'intervallo di convergenza è limitato, diciamo $]x_0 - R, x_0 + R[$, niente si può dire della convergenza della serie negli estremi dell'intervallo, inoltre nei punti interni all'intervallo di convergenza la serie converge anche assolutamente. Essendo inoltre la convergenza uniforme, la somma di una serie di potenze è una funzione continua nei punti interni all'intervallo di convergenza.

Oltre ai teoremi enunciati per le serie di funzioni uniformemente convergenti, vale anche il seguente teorema:

TEOREMA 9 – Ogni serie di potenze con raggio di convergenza non nullo si deriva termine a termine e il raggio di convergenza della serie derivata è uguale a quello della serie data.

In particolare quindi anche la serie derivata può a sua volta venir derivata termine a termine e ciò tante volte quante si vuole.

Diamo ora alcuni criteri per la determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze.

CRITERIO DEL RAPPORTO – Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, se $a_n \neq 0$ per ogni n e se esiste, finito o meno, il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, allora il raggio di convergenza della serie è R.

CRITERIO DELLA RADICE – Se esiste, finito o meno, il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ allora il raggio di convergenza della serie è

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & se \quad L \neq 0, L \neq +\infty \\ 0 & se \quad L = +\infty \\ +\infty & se \quad L = 0 \end{cases}.$$

ESEMPIO 16 – Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\left(n^2+2\right)2^n}$.

Per la determinazione del raggio di convergenza utilizziamo il criterio del rapporto, calcolando

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{1}{\left(n^2+2\right)2^n}\right|}{\left|\frac{1}{\left((n+1)^2+2\right)2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left((n+1)^2+2\right)2^{n+1}}{\left(n^2+2\right)2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(n^2+2n+3\right)}{\left(n^2+2\right)} = 2 .$$

Il raggio di convergenza è quindi R = 2. Nel punto x = 2 la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2}$, che converge, mentre per $x = -2$ abbiamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ che è (assolutamente) convergente. La serie converge quindi in $[-2,2]$.

◊

ESEMPIO 17 – Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{x^{3n}}{3^n}$.

Effettuiamo la sostituzione $z = x^3$ ottenendo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{z^n}{3^n}$ e utilizzando il criterio del rapporto si ha:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{n+2}\right| \frac{1}{3^n}}{\left|\frac{n+2}{n+3}\right| \frac{1}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = 3$$

La serie (nella variabile z) ha raggio di convergenza R_z = 3, quindi converge per $|z| < 3$ e ricordando la sostituzione fatta si ha che la serie converge per $|x| < \sqrt[3]{3}$. Ponendo nella serie $x = \sqrt[3]{3}$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$ che non converge. Ponendo $x = -\sqrt[3]{3}$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ che non converge. L'insieme di convergenza della serie è quindi $\left]-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\right[$.

◊

ESEMPIO 18 – Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$, dove α è un numero reale positivo.

Per determinare il raggio di convergenza utilizziamo il criterio della radice, quindi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}}$.

Osserviamo che $\sqrt[n]{n^{\alpha}} = n^{\alpha/n} = e^{\frac{\alpha \ln n}{n}}$ e ricordando che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{\alpha}}} = 1$. Il raggio di convergenza della serie è quindi $R = 1$ per ogni $\alpha > 0$. Studiamo il comportamento nell'estremo $x = 1$; la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ che converge se $\alpha > 1$ e non converge se $\alpha \leq 1$. Sostituendo invece $x = -1$, abbiamo invece la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ che converge per ogni valore di $\alpha > 0$, per il criterio di Leibniz. Infatti il termine generale è decrescente e infinitesimo. L'insieme di convergenza della serie è quindi $[-1, 1[$ se $\alpha \leq 1$ e $[-1, 1]$ se $\alpha > 1$.

◊

ESEMPIO 19 – Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1}$

La serie data non è della forma (1); per ricondurla a questa forma scriviamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{3^n+1}$ e con la sostituzione $z = x - \frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n z^n}{3^n+1}$ centrata nell'origine. Utilizzando il driterio del rapporto si dimostra che la serie ha raggio di convergenza R = 3/2 agli estremi dell'intervallo la serie diverge, per cui la serie (in z) converge per $-\frac{3}{2} < z < \frac{3}{2}$, e tenendo conto della sostituzione si ha: $-\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, ovvero $-1 < x < 2$.

◊

4 – Serie di Taylor

Sia ora $f(x)$ una funzione di classe C^{∞} (ossia una funzione continua con derivata continua infinite colte) in un intorno di x_0. Ad essa può associarsi la serie di Taylor

(3)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Questa si chiama *la serie di Taylor della funzione f e di centro* x_0.

Questa serie potrebbe non convergere e anche nel caso in cui convergesse potrebbe non convergere alla funzione *f*.

ESEMPIO 20 – Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & per \quad x \neq 0 \\ 0 & per \quad x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione è derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$ e le sue derivate sono tutte nulle in 0 e quindi la serie di Taylor di centro $x = 0$ ha tutti i coefficienti nulli e quindi su $\mathbb{R}$ converge alla funzione identicamente nulla e non alla funzione $f(x)$ data.

◊

Per determinare quali sono le condizioni sotto le quali la serie di Taylor converge scriviamo la formula di Taylor di $f(x)$ arrestata all'ordine k e col resto in forma di Lagrange, cioè:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi_k)(x - x_0)^{k+1}$$

dove ξ_k dipende da k ed è compreso tra x_0 e x. La serie di Taylor converge ad $f(x)$ quando il resto converge a zero. Una condizione perché ciò accada è:

TEOREMA 10 – Se esistono due numeri M e L tali che $\left| f^{(k)}(x) \right| < ML^k$ per ogni $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, allora la serie di Taylor di $f(x)$ converge su $[x_0 - r, x_0 + r]$ alla funzione $f(x)$.

Nel caso in cui il centro della serie di Taylor sia uguale a zero, la serie prende il nome di serie di McLaurin.

La condizione del Teorema 10 è soddisfatta nel caso delle funzioni e^x, $senx$, $cos\,x$ i cui raggi di convergenza sono infinito. Gli sviluppi di tali funzioni sono:

(4) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(5) $$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(6) $$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ricordando la serie geometrica

(7) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

che ha raggio di convergenza uguale a 1, cambiando x con $-x$ e integrando si ha lo sviluppo in serie della funzione $ln(1+x)$. Si trova così la serie logaritmica di raggio di convergenza uguale a 1:

(8) $$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n .$$

Si osservi che mentre la serie (7) non converge per $x = \pm 1$, la serie (8) converge per $x = 1$ e non converge per $x = -1$.

Ponendo nella (7) $-x^2$ al posto di x e integrando tra 0 e x con $|x| < 1$, si ottiene lo sviluppo di McLaurin della funzione $arctgx$:

(9) $$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

che converge per $|x| < 1$.

Ponendo nella (7) x^2 al posto di x e integrando tra 0 e x si ottiene lo sviluppo di McLaurin della funzione $ln\frac{1+x}{1-x}$ che converge per $|x|<1$:

(10) $$ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Estendendo il significato di coefficiente binomiale[1] al caso in cui α è un numero reale e k un numero naturale, si ha:

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Ciò permette di definire lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione $(1+x)^\alpha$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ qualunque e $|x|<1$. Si ha:

(11) $$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

La serie (11) prende il nome di serie binomiale e in molte applicazioni pratiche è utilizzata l'approssimazione:

$$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$$

che si ottiene arrestando la serie al secondo termine; l'errore che si commette è infinitesimo dello stesso ordine di x^2.

Ponendo nella (11) $\alpha=-\frac{1}{2}$, si ottiene lo sviluppo:

(12) $$(1+x)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}x^n+\ldots.$$

5 – Esercizi

Esercizi svolti sulle successioni e sulle serie di funzioni possono essere reperiti in internet; qui sotto vengono riportati gli indirizzi da cui prendere alcuni esempi che per comodità vengono anche allegati (nell'ordine indicato).

1 - http://www2.ing.unipi.it/~o16137/didattica/success.pdf
2 - http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d%27esame/Esercizi/svol_serie_di_funzioni.pdf
3 - http://www2.ing.unipi.it/~o16137/didattica/serief.pdf
4 - http://vluisi.files.wordpress.com/2007/12/eserciziseriefunzioni.pdf
5 - http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/pdf/seriepotenze-svolti.pdf

[1] Nel caso di n e k numeri naturali i coefficienti binomiali sono definiti dalla relazione:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Esercizio 1. Assegnata la successione di funzioni $\{f_n\}_n$,dove per ogni naturale n, f_n é definita da

$$f_n(x) = nxe^{-nx},$$

studiare dove $\{f_n\}_n$ converge e determinare intervalli dove la convergenza é uniforme.

Soluzione. La successione converge puntualmente su $A = \{x \geq 0\}$ alla funzione f identicamente nulla: infatti, se $x = 0$, $f_n(0) = 0$; se invece $x \geq 0$, considerata f_n come rapporto di infiniti, il numeratore nx é un infinito di ordine inferiore rispetto a e^{nx}, quindi il limite é zero. Se invece x é negativo, si ha che f_n é prodotto di infiniti, e in particolare

$$\lim_n f_n(x) = -\infty.$$

Ora, poiché risulta

$$\sup_{x \in A} |f_n - f| = f_n(1/n) = 1/e,$$

(basta infatti calcolare la derivata prima di $f_n - f = f_n$ e controllare che Ne segue che la convergenza su A non é uniforme.

Se, invece, si considera un qualunque intervallo B della forma $[a, +\infty)$, con a maggiore di zero, dall'essere

$$\sup_{x \in B} |f_n - f| = na\, e^{-na},$$

segue che la convergenza é uniforme su ogni intervallo B, in quanto, evidentemente,

$$\lim_n \sup_{x \in B} |f_n - f| = \lim_n na\, e^{-na} = 0.$$

Esercizio 2. Si consideri la successione $\{f_n\}_n$ dove, per ogni naturale n, la funzione f_n é definita da

$$f_n(x) = n arctg \frac{x}{n},$$

e si studino convergenza puntuale e uniforme su $A = [-\pi, \pi]$.

Soluzione. Fissato $x \in A$, si ha che

$$\lim_n n arctg \frac{x}{n} = \lim_{u \to 0} x \frac{arctg u}{u} = x,$$

quindi la successione converge alla funzione f definita da $f(x) = x$. Calcoliamo ora il

$$\sup_{x \in A} |n arctg \frac{x}{n} - x|.$$

Essendo la funzione $f_n - f$ dispari e crescente (lo si deduce dallo studio della derivata prima), si ha che l'estremo superiore cercato é un massimo e vale

$$\pi - n arctg \frac{\pi}{n};$$

tale quantitá ha limite zero per n che tende a $+\infty$ quindi si ha convergenza uniforme su A.

Esercizio 3. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1 + nx}{1 + n^2x^2}.$$

Si studi la convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ e si trovino gli insiemi di convergenza uniforme.

Soluzione. Si osserva subito

$$\lim_n f_n(0) = 1.$$

Se invece $x \neq 0$, allora il numeratore é un infinito di ordine 1 mentre il denominatore é di ordine 2, quindi il limite é zero. Si ha quindi convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ ma non convergenza uniforme: basta osservare che il limite puntuale della successione $\{f_n\}_n$ é una funzione discontinua in $x = 0$, mentre ogni f_n é continua anche in $x = 0$. Si ha invece convergenza uniforme su insiemi della forma $B = [a, +\infty)$, con a maggiore di zero. Infatti, sugli insiemi della forma considerata, da un certo indice n in poi, valgono le diseguaglianze

$$\frac{1 + nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{nx + nx}{1 + n^2x^2}$$

$$\frac{2nx}{n^2x^2} \leq \frac{2}{na}.$$

E poiché questo equivale a dire che

$$\sup_{x\in B} |f_n - f| \leq \frac{2}{na}$$

si conclude che si ha convergenza uniforme su B.

Serie di funzioni: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Studiare la convergenza normale, uniforme, assoluta e puntuale delle seguenti serie di funzioni:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}}, \quad x \in [-1,1]$ [converge normalmente]

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$ [converge normalmente]

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad |x| \geq a > 0$ [converge normalmente in $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$]

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}, \quad x \geq 0$ [converge normalmente]

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$ [converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0, \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$ converge assolutamente a $|f(x)|$]

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in [-1,1]$ [converge assolutamente in $(-1,1)$]

**g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}, \quad x \geq a > 1$ [converge normalmente in $[a,+\infty)$]

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\arctan(nx) - \arctan[(n-1)x]\Big), \quad x \in \mathbb{R}$ [converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0, \\ 0 & \text{se } x=0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x>0 \end{cases}$ e assolutamente a $|f(x)|$]

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}$ [converge normalmente]

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^n(\sin x)^{2n}}{n+1}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ [converge normalmente]

Svolgimento

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}}$ è una serie di funzioni continue su $[-1,1]$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}}$.

Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $[-1,1]$.

b) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$ è una serie di funzioni continue su $\mathbb{R}$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$.

Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $\mathbb{R}$.

c) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ è una serie di funzioni continue su $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$. Per ogni $n \geq 0$ poniamo $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{|x|\geq a} |f_n(x)| = \sup_{|x|\geq a} \left(\frac{1}{1+n^2x^2} \right) = \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2a^2}$ è convergente. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ è una serie di funzioni continue su $[0, +\infty)$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$.

Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} \left(\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ è convergente. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $[0, +\infty)$.

e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2} \right)$ è una serie di funzioni continue su $\mathbb{R}$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2}$.

Osserviamo che la serie data è telescopica. Consideriamo inizialmente la convergenza puntuale. La somma parziale n-esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kx}{1+kx^2} - \frac{(k-1)x}{1+(k-1)x^2} \right) = \\ &= \frac{x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2} + \cdots + \frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2} = \\ &= \frac{nx}{1+nx^2}. \end{aligned}$$

Quindi la somma della serie è

$$S(x) = \lim_n S_n(x) = \lim_n \frac{nx}{1+nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Quindi la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione S. Essendo f_n continua su $\mathbb{R}$, anche S_n è continua su $\mathbb{R}$, mentre S non è continua in 0. Quindi la successione (S_n) non converge uniformemente a S in $\mathbb{R}$ e di conseguenza la serie data non converge uniformemente e normalmente in $\mathbb{R}$.

Infine consideriamo la convergenza assoluta. Osserviamo che

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2} = \frac{x}{(1+nx^2)[1+(n-1)x^2]}.$$

Quindi $f_n(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Inoltre f_n è dispari. Ne segue che se $x \geq 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge a $S(x)$; se $x < 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(-x)$ converge a $S(-x) = -\frac{1}{x}$. Quindi la serie data converge assolutamente in $\mathbb{R}$ a

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

<u>Osservazione</u>

Si ha che $T(x) = |S(x)|$. In generale non è detto che se una serie converge puntualmente ad una funzione S, allora converge assolutamente a $|S|$.

f) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ è una serie di funzioni continue su $[-1,1]$. Per ogni $n \geq 0$ poniamo $f_n(x) = (-1)^n x^n = (-x)^n$. Quindi la serie data è una serie geometrica con ragione $-x$. Pertanto converge puntualmente se e solo se $|-x| < 1$, cioè per $x \in (-1,1)$ ed in tal caso la somma della serie è $S(x) = \frac{1}{1+x}$. Osserviamo inoltre che per $x \in (-1,1)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ converge a $T(x) = \frac{1}{1-|x|}$. Quindi la serie data converge assolutamente in $(-1,1)$ a $T(x) = \frac{1}{1-|x|}$.

Consideriamo ora la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in(-1,1)} |f_n(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} |x|^n = 1.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ diverge. Ne segue che la serie data non converge normalmente in $(-1,1)$.

Infine consideriamo la convergenza uniforme. Poichè la somma della serie S non è limitata su $(-1,1)$, allora la serie data non converge uniformemente in $(-1,1)$.

<u>Osservazione</u>

Si ha che $T(x) \neq |S(x)|$. Infatti, non è detto che se una serie converge puntualmente ad una funzione S, allora converge assolutamente a $|S|$.

*$g)$ La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$ è una serie di funzioni continue su $[a,+\infty)$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$.

Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Si ha che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq a} |f_n(x)| = \sup_{x\geq a} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}.$$

Determiniamo quindi $\displaystyle\sup_{x\geq a} f_n(x)$. Si ha che

$$f_n'(x) = \frac{\frac{x}{1+nx} - \log(1+nx)}{x^{n+1}}.$$

Dobbiamo studiare il segno del numeratore di f_n'. Osserviamo che se $x \geq 1$ e $n \geq 1$

$$\frac{nx}{1+nx} \leq \log(1+nx). \tag{1.1}$$

Infatti, se si considera la funzione $g(t) = \frac{t}{1+t} - \log(1+t)$, si ha che g è derivabile su $[1,+\infty)$ con $g'(t) = -\frac{t}{(1+t)^2} < 0$. Ne segue che g è decrescente su $[1,+\infty)$. Quindi per ogni $t \geq 1$ si ha $g(t) \leq g(1) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$, da cui $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t)$. Pertanto si ha che

$$\frac{nx}{1+nx} \leq \log(1+nx).$$

Ne segue che

$$\frac{x}{1+nx} \leq \frac{nx}{1+nx} \leq \log(1+nx),$$

in particolare

$$\frac{x}{1+nx} - \log(1+nx) \leq 0$$

da cui segue che $f_n'(x) \leq 0$ per ogni $x \geq a$. Quindi f_n è decrescente su $[a,+\infty)$ e di conseguenza

$$\sup_{x\geq a} f_n(x) = f_n(a) = \frac{\log(1+na)}{na^n}.$$

Quindi la serie da studiare è $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+na)}{na^n}$. Osserviamo che per ogni $t \geq 0$ si ha che $\log(1+t) \leq t$. Infatti, se si considera la funzione $h(t) = \log(1+t) - t$, si ha che h è derivabile su $[0,+\infty)$ con $h'(t) = -\frac{t}{1+t} \leq 0$. Ne segue che h è decrescente su $[0,+\infty)$. Quindi per ogni $t \geq 0$ si ha $h(t) \leq h(0) = 0$, da cui $\log(1+t) \leq t$. Pertanto si ha che

$$\log(1+na) \leq na \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log(1+na)}{na^n} \leq \frac{1}{a^{n-1}}.$$

Essendo $a > 1$ la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n-1}}$ converge. Quindi per il criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+na)}{na^n}$ converge. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $[a,+\infty)$.

h) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\arctan(nx) - \arctan[(n-1)x]\Big)$ è una serie di funzioni continue su $\mathbb{R}$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \arctan(nx) - \arctan[(n-1)x]$.

Osserviamo che la serie data è telescopica. Consideriamo inizialmente la convergenza puntuale. La somma parziale n-esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\arctan(kx) - \arctan[(k-1)x]\Big) = \\ &= \arctan x + \arctan 2x - \arctan x + \dots + \\ &\quad + \arctan(nx) - \arctan[(n-1)x] = \\ &= \arctan(nx). \end{aligned}$$

Quindi la somma della serie è

$$S(x) = \lim_n S_n(x) = \lim_n \arctan(nx) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione S. Essendo f_n continua su $\mathbb{R}$, anche S_n è continua su $\mathbb{R}$, mentre S non è continua in 0. Quindi la successione (S_n) non converge uniformemente a S in $\mathbb{R}$ e di conseguenza la serie data non converge uniformemente e normalmente in $\mathbb{R}$.

Infine consideriamo la convergenza assoluta. Osserviamo che $f_n(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Inoltre f_n è dispari. Ne segue che se $x \geq 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

converge a $S(x)$; se $x < 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(-x)$ converge a $S(-x) = \frac{\pi}{2}$. Quindi la serie data converge assolutamente in $\mathbb{R}$ a

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ è una serie di funzioni continue su $\mathbb{R}$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n(n+1)}$.

Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Poichè $|\cos nx| \leq 1$, si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, per il criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $\mathbb{R}$.

l) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n (\sin x)^{2n}}{n+1}$ è una serie di funzioni continue su $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Per ogni $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{2^n (\sin x)^{2n}}{n+1} = (-1)^{n-1} \frac{(2\sin^2 x)^n}{n+1}$. Consideriamo inizialmente la convergenza normale, ossia la convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Poichè per ogni $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ si ha $2\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$, si ha che

$$|f_n(x)| = \left| (-1)^{n-1} \frac{(2\sin^2 x)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

e quindi

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente, per il criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge. Ne segue che la serie data converge normalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente in $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

SERIE DI FUNZIONI

Esercizio 1. Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+2)!}.$$

Si tratta di una serie di potenze, che possiamo riscrivere come

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{(n+2)!}.$$

Se indichiamo con S la somma della serie, possiamo osservare subito che $S(0) = 0$. Se, invece, $x \neq 0$, sull'isieme di convergenza possiamo scrivere anche

$$S(x) = \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{(n+2)}}{(n+2)!} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!}.$$

Per ogni naturale m, indicato con a_m il coefficiente $\frac{1}{m!}$, ed essendo

$$\lim_m |\frac{a_m}{a_{m+1}} = \lim_m (m+1) = +\infty,$$

si conclude che il raggio di convergenza della serie vale $+\infty$. Quindi la serie data converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$, e converge uniformemente sugli intervalli limitati. Inoltre essendo

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

si conclude che la somma della serie è nulla in zero e per $x \neq 0$ vale

$$\frac{1}{x^3}(e^{x^2} - 1 - x^2).$$

Esercizio 2. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni defìnta da

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Soluzione. Fissato $x \in \mathbb{R}^+$, si ha che

$$\lim_n n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_n n(e^{\frac{\log x}{n}} - 1) = \log x.$$

Dunque c'é convergenza puntuale su $\mathbb{R}^+$ alla funzione f definita da

$$f(x) = \log x.$$

Si osserva, poi, che non può esserci convergenza uniforme su insiemi illimitati di $\mathbb{R}^+$ e neppure su insiemi che hanno lo zero come punto di accumulazione, in quanto

$$\lim_{x \to 0} \big(f_n(x) - f(x)\big) = \lim_{x \to +\infty} \big(f_n(x) - f(x)\big) = +\infty.$$

Se si considerano, invece, insiemi limitati $A = [a, b] \subset (0, +\infty)$, allora si ha convergenza uniforme. Infatti, posto $g_n = f_n - f$, la derivata di g_n vale

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x},$$

e quindi g_n decresce su $(0, 1)$, assume minimo uguale a zero in $x = 1$, e cresce dopo 1. Quindi

$$\sup_{x \in A} |f_n - f| = \sup_{x \in A} g_n = \max(g_n(a), g_n(b)).$$

Per la convergenza puntuale su $\mathbb{R}^+$ vale

$$\lim_n g_n(a) = \lim_n g_n(b) = 0,$$

da cui si deeduce la convergenza uniforme su A.

Esercizio 3. Si determini l'insieme X di convergenza puntuale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin e^{-nx^2},$$

e si provi che su X non può esserci convergenza uniforme. Trovare poi intervalli di convergenza uniforme.

Soluzione. Se $x = 0$, il termine generale della serie numerica ottenuta non é infinitesimo (vale $\sin 1$), quindi non si ha convergenza. Se, invece, $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$, allora la diseguaglianza

$$0 < \sin\, e^{-nx^2} \leq e^{-nx^2}$$

implica la convergenza della serie in quanto la serie geometrica di ragione e^{-x^2} converge ($e^{-x^2} < 1$).
Per quanto riguarda la convergenza uniforme, questa non può sussistere su X perché

$$\sup_X |\sin e^{-nx^2}| = 1.$$

Si ha invece convergenza uniforme sugli insiemi A della forma $(-\infty, a] \cup [a, +\infty)$; infatti, per la crescenza della funzione sin su $[0, \pi/2]$, ed essendo

$$0 < e^{-nx^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2},$$

si ha che

$$\sup_{x\in A} |\sin e^{-nx^2}| = \sin^{-na^2}.$$

Quindi la serie converge totalmente su A (è una serie geometrica di ragione e^{-a^2}) e quindi uniformemente.

Esercizio 4. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n}.$$

Si determini l'insieme di convergenza puntuale e uniforme.

Soluzione. Se $x = 0$ la serie diventa la serie armonica di termine generale $1/n$, che è divergente. Se x è maggiore di zero il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge. Se invece x è negativo, allora la diseguaglianza

$$\frac{e^{nx}}{n} \leq e^{nx},$$

implica convergenza (il termine generale e^{nx} definisce una serie geometrica di ragione e^x, che è una ragione minore di 1 perché x è negativo).

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, consideriamo insiemi A della forma $(-\infty, a]$ contenuti in $(-\infty, 0)$. Si osserva che

$$\sup_{x\in A} e^{nx} = e^{na},$$

e quindi, dalla convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{na}$$

si conclude che la serie data converge totalmente e quindi uniformemente.

Esercizio 5. Dopo aver determinato l'insieme X di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^2},$$

provare che in X non può esserci convergenza uniforme e trovare intervalli di convergenza uniforme.

Soluzione. È noto che, per ogni numero reale positivo α,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log\, t}{t^\alpha} = 0.$$

Scelto quindi $\alpha = 1/2$, possiamo affermare che esiste $\bar{t}$ tale che, per $t > \bar{t}$

$$\log\, t \leq \sqrt{t}.$$

Allora possiamo maggiorare il termine generale della serie data come segue

$$\frac{\log\,(1+nx^2)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{1+nx^2}}{n^2},$$

e quindi concludere che si ha convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ perché la serie di termine generale

$$\frac{\sqrt{1+nx^2}}{n^2}$$

converge avendo ordine di infinitesimo $3/2$.

Su $\mathbb{R}$ non ci può essere convergenza uniforme perché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \log\left(1+nx^2\right) = +\infty.$$

Consideriamo, invece, intervalli $[a,b]$ di $\mathbb{R}$. Poichè la funzione

$$\log\left(1+nx^2\right)$$

è positiva, pari, assume minimo in $x=0$ e cresce sulla semiretta positiva delle x, si ha che

$$\sup_{x\in[a,b]} \frac{\log\left(1+nx^2\right)}{n^2} = \max\left(\frac{\log\left(1+na^2\right)}{n^2}, \frac{\log\left(1+nb^2\right)}{n^2}\right),$$

e quindi per quanto affermato prima la serie converge totalmente e quindi uniformemente su $[a,b]$.

Esercizi su successioni di funzioni e serie di funzioni

1. *Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, definite ponendo*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{se } x \notin [-n, n] \end{cases}$$

stabilire se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ed uniformemente verso una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Risoluzione Fisso $x \in \mathbb{R}$. Poichè $\lim\limits_n f_n(x) = 1$, allora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Fisso $n \in \mathbb{N}$. Poichè $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1$, si ha che $\lim\limits_n \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$. Pertanto la convergenza non è uniforme.

2. *Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tali che $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, definite ponendo*

$$\forall x \in [-1, 1] : f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},$$

stabilire se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puntualmente ed uniformemente verso una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

Risoluzione Fisso $x \in [-1, 1]$. Poichè $\lim\limits_n f_n(x) = \lim\limits_n \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|$, allora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puntualmente ad una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |x|$ per ogni $x \in [-1, 1]$. Fisso $n \in \mathbb{N}^*$ e calcolo $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)|$. Fisso $x \in [-1, 1]$, si ha che

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \frac{\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \right|}{\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \right|} \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Allora $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e pertanto $\lim\limits_n \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, cioè la convergenza è anche uniforme.

3. *Studiare la convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $x \geq 0$.*

Risoluzione Fisso $x \geq 0$. Per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\frac{nx^2}{n^3 + x^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ converge uniformemente.

4. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{nx}{1+n^4x}}$, $x \geq 0$.

Risoluzione Fisso $x \geq 0$. Per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\sqrt{\frac{nx}{1 + n^4x}} \leq \sqrt{\frac{nx}{n^4x}} = \sqrt{\frac{1}{n^3}}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{nx}{1+n^4x}}$ converge uniformemente.

5. *Studiare la convergenza della serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$.

Risoluzione Posto $a_n = 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il criterio di D'Alembert, essendo

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

si ha che $R = \frac{1}{2}$, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Se $x = -\frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ che non converge. Se $x = \frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che non converge. Quindi l'insieme di convergenza è $A = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

6. *Studiare la convergenza della serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} e^{-n}$.

Risoluzione Pongo $x^2 = y$ e considero la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} y^n e^{-n}$. Posto $a_n = e^{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il criterio di Cauchy-Hadamard, essendo

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{e^{-n}} = \frac{1}{e},$$

si ha che $R = e$, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} y^n e^{-n}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $]-e, e[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-e, e]$. Se $y = -e$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ che non converge. Se $y = e$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che non converge. Quindi l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} y^n e^{-n}$ è $]-e, e[$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} e^{-n}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-\sqrt{e}, \sqrt{e}]$ e il suo insieme di convergenza è $]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$.

7. *Studiare la convergenza della serie di potenze* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Risoluzione Pongo $x + 3 = y$ e considero la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$. Posto $a_n = \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$, per il criterio di D'Alembert, essendo

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1,$$

si ha che $R = 1$, quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $]-1, 1[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-1, 1]$. Se $y = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ che converge. Se $y = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge. Quindi l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ è $[-1, 1]$. Pertanto l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ è $[-4, -2]$.

1.6 Serie di potenze - Esercizi risolti

Esercizio 1.6.1

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+2)2^n}. \tag{1.1}$$

Soluzione Per la determinazione del raggio di convergenza utilizziamo il criterio del rapporto, calcolando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2)2^n}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2}{n^2+2n+3} = \frac{1}{2}.$$

Il raggio di convergenza è quindi $R = 2$. Nel punto $x = 2$ la serie (1.1) si riduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)},$$

che converge (è equivalente a $\sum 1/n^2$), mentre per $x = -2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+2)},$$

che è (assolutamente) convergente. Quindi la serie (1.1) converge in $[-2, 2]$. ■

Esercizio 1.6.2

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^{3n}}{3^n}. \tag{1.2}$$

Soluzione Con la sostituzione $z = x^3$ ci riconduciamo alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{z^n}{3^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto, calcolando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3}\frac{n+2}{n+1}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

La serie (nella variabile z) ha raggio di convergenza $R_z = 3$; quindi converge per $|z| < 3$; ricordando la sostituzione fatta, la serie (1.2) converge per $|x^3| < 3$, cioè per $|x| < \sqrt[3]{3}$.

Ponendo nella (1.2) $x = \sqrt[3]{3}$, otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2},$$

che non converge in quanto il suo termine generale non tende a zero (condizione necessaria di convergenza delle serie numeriche). Ponendo invece nella (1.2) $x = -\sqrt[3]{3}$, otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2};$$

anche questa serie non converge in quanto il suo termine generale non ammette limite (per n pari la successione dei suoi termini tende a 1, mentre per n dispari tende a -1).

L'insieme di convergenza della (1.2) è quindi $(-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. ■

Esercizio 1.6.3

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a}, \tag{1.3}$$

dove a è un numero reale positivo.

Soluzione Determiniamo il raggio di convergenza con il criterio della radice. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^a}}$$

Possiamo scrivere $\sqrt[n]{n^a} = n^{a/n} = \exp \frac{a \ln n}{n}$. Ricordando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

abbiamo che $\frac{a \ln n}{n} \to 0$ e quindi $\exp \frac{a \ln n}{n} \to 1$. Il raggio di convergenza della (1.3) è quindi $R = 1$ per ogni valore $a > 0$.

Studiamo il comportamento nell'estremo $x = 1$; la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

converge se $a > 1$ e non converge se $a \leq 1$,

Sostituendo invece $x = -1$, abbiamo invece la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

Questa serie è convergente per ogni valore di $a > 0$, per il criterio di Leibniz. Infatti il termine generale è decrescente e infinitesimo.

L'insieme di convergenza della(1.3) è quindi $[-1, 1)$ se $a \leq 1$ e $[-1, 1]$ se $a > 1$. ■

Esercizio 1.6.4

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} = x + x^2 + x^6 + x^{24} + x^{120} + \ldots \tag{1.4}$$

Soluzione La successione dei coefficienti (sempre a partire dal termine costante) è

$$0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0, ... ,$$

dove gli zeri non si ripetono con regolarità ma in blocchi "sempre più grandi" all'aumentare di n. Non è quindi possibile quindi operare una sostituzione $z = x^k$ allo scopo di ottenere una serie con coefficienti non nulli.

Per studiare l'insieme di convergenza della serie assegnata bisogna procedere direttamente. È immediato osservare che la serie diverge in $x = 1$ e in $x = -1$, mentre converge per $|x| < 1$. Infatti se $|x| < 1$ possiamo affermare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{n!}| = |x| + |x^2| + |x^6| + \ldots \leq |x| + |x^2| + |x^3| + |x^4| + |x^5| + \ldots ;$$

la serie maggiorante è la serie geometrica presa in modulo, che sappiamo essere convergente per $|x| < 1$. Dal criterio del confronto discende l'assoluta convergenza della (1.4), che ha quindi raggio di convergenza uguale a uno e insieme di convergenza $(-1, 1)$. ■

Esercizio 1.6.5

Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1}. \tag{1.5}$$

Soluzione La serie assegnata non è della forma (**??**); per ricondurla a questa forma scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(x-1/2))^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-1/2)^n}{3^n+1}.$$

Con la sostituzione $z = x - 1/2$ ci riconduciamo a una serie centrata nell'origine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{3^n+1}.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 3/2$, come si verifica con il criterio del rapporto; agli estremi dell'intervallo la serie diverge (in entrambi i casi si ottiene una serie il cui termine generale non è infinitesimo), per cui l'insieme di convergenza risulta $\{z : -3/2 < z < 3/2\}$. Tenendo conto della sostituzione $z = x - 1/2$ la (1.5) ha come insieme di convergenza $\{x : -1 < x < 2\}$. ■

Esercizio 1.6.6

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni, centrato nei punti indicati, indicandone il raggio di convergenza:

a) $f(x) = \exp(1 - x^2)$ $x_0 = 0$ *b*) $g(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ $x_0 = 0$ *c*) $h(x) = \ln(1 + x)$ $x_0 = 1$

Soluzione

a) Poichè $f(x) = \exp(1)\exp(-x^2)$, utilizzando lo sviluppo della funzione esponenziale

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

e operando la sostituzione $z = -x^2$, otteniamo

$$f(x) = \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

La serie esponenziale converge per ogni z reale e quindi la serie data converge per ogni x reale.

b) Possiamo calcolare lo sviluppo di $g(x)$, riconducendoci alla serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \text{per } |z| < 1. \tag{1.6}$$

Scriviamo

$$g(x) = \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{-3\left(1 - \frac{2x}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2x}{3}}$$

e sostituiamo $z = 2x/3$, ottenendo

$$g(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^n = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}\right) x^n.$$

Poichè la (1.6) converge per $|z| < 1$, tenendo conto della sostituzione effettuata, la serie che abbiamo ottenuto converge se $|\frac{2x}{3}| < 1$, vale a dire per $|x| < \frac{3}{2}$. È immediato verificare che la serie non converge nei punti $x = 3/2$ e $x = -3/2$.

c) Con la sostituzione $t = x - 1$ ci riconduciamo allo sviluppo centrato in $t_0 = 0$ della funzione $\ln(2 + t)$, che scriviamo nella forma

$$\ln(2+t) = \ln\left(2\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right).$$

Utilizzando lo sviluppo della funzione

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \qquad \text{per } |z| < 1 \tag{1.7}$$

con la sostituzione $z = t/2$, otteniamo

$$\ln(2+t) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n 2^n},$$

che converge quando $|t/2| < 1$, cioè quando $|t| < 2$, e infine

$$\ln(1+x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n 2^n}.$$

Questa serie converge se $|x - 1| < 2$, cioè nell'intervallo $(-1, 3)$. Nel punto $x = 3$ converge, in quanto si riduce alla serie armonica a segni alterni. Nel punto $x = -1$ si ottiene invece la serie

$$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n2^n}{n2^n}=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

che è divergente. ■

Esercizio 1.6.7

Sviluppare in serie di McLaurin la funzione

$$f(x)=\frac{2x-8}{x^2-8x+12}$$

precisando il raggio di convergenza. Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare $f^{(n)}(0)$ per n generico.
Soluzione Conviene decomporre la funzione $f(x)$ in fratti semplici e sviluppare le due funzioni ottenute:

$$f(x)=\frac{2x-8}{x^2-8x+12}=\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-6(1-x/6)}+\frac{1}{-2(1-x/2)}$$

Utilizzando la serie geometrica (1.6), con le sostituzioni $z=x/6$ e $z=x/2$, rispettivamente, otteniamo

$$f(x)=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{6^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{6^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{6^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

.

Ricordando la formula dello sviluppo in serie di Taylor, si ha che

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{6^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

e quindi

$$f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{6^{n+1}}-\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

■

Esercizio 1.6.8

Determinare l'insieme di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x^2)^n}{n}.$$

Soluzione Con la sostituzione $z=1-x^2$ ci riconduciamo alla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

che ha raggio di convergenza $R_z=1$ e converge in $[-1,1)$. La serie di funzioni converge allora negli x tali che $-1\le 1-x^2<1$, vale a dire nell'insieme $[-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2}]$; osserviamo che questo insieme NON è un intervallo. ■

Osservazione Nello studio degli integrali si è osservato che esistono delle funzioni elementari le cui primitive non possono essere espresse in termini di funzioni elementari. In alcuni casi, funzioni di questo tipo assumono grande importanza applicativa, ad esempio in elettronica, in ottica o nel calcolo delle probabilità. Risulta quindi conveniente definire delle nuove funzioni appunto come funzioni integrali, senza che sia possible esprimerle in termini di funzioni note.

Gli sviluppi in serie di potenze ci consentono di calcolare queste funzioni. Vediamo alcuni esempi di funzioni di questo tipo:

1. la funzione seno integrale di x, $\mathrm{Si}(x)$, che è definita come
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt;$$
2. la funzione degli errori, $\mathrm{Erf}(x)$, che è definita come
$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt;$$
3. la funzione integrale di Fresnel, $\mathrm{S}(x)$, che è definita come
$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

■

Esercizio 1.6.9

Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\mathrm{Si}(x)$ e calcolare $\mathrm{Si}(1)$ con un errore minore di 10^{-3}.

Soluzione Partiamo dallo sviluppo della funzione seno, che sappiamo essere convergente per ogni z reale:
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.8}$$

Scrivendo questo sviluppo nella variabile t e dividendo per t otteniamo:
$$\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Integriamo per serie (l'operazione è senz'altro possibile, perché lo sviluppo precedente ha raggio di convergenza infinito):
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Questo sviluppo ha raggio di convergenza infinito.

Per calcolare $\mathrm{Si}(1)$, calcoliamo la serie che abbiamo ottenuto per $x = 1$; otteniamo una serie numerica a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} + \dots$$

Affinché l'errore sia minore di 10^{-3}, per il teorema sulle serie a segno alterno, è sufficiente fermarci al terzo termine. Infatti il primo termine trascurato è minore di 10^{-3}, essendo $7!7 \approx 35000$.