Formula di Taylor

Si ricorderà che l'equazione della tangente ad una curva di equazione $y = f(x)$ in un punto x_0 è data dalla relazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Si noti che la tangente è una funzione che in x_0 ha lo stesso valore della funzione e lo stesso valore della derivata.

Si consideri la funzione $y = e^x$; essendo $e^0 = 1$, l'equazione della tangente nell'origine è $y = x + 1$. Si supponga ora di dover calcolare $e^{0,1}$; con una calcolatrice si ottiene $e^{0,1} = 1,105170918\ldots$. Se ci si accontenta di un'approssimazione un po' meno buona, si può calcolare il valore che la tangente alla funzione $y = e^x$ in $x = 0$ assume in $x = 0,1$, cioè $y(0,1) = 0,1 + 1 = 1,1$. È evidente che si commette un errore

$$\Delta = \left| e^{0,1} - y(0,1) \right| = 0,005170918...$$

pari allo 0,47%.

L'errore è ancora più piccolo se si calcola $e^{0,01}$; infatti si ha $\Delta = \left| e^{0,01} - y(0,01) \right| = 0,000050167\ldots$.

Si provi ora a considerare una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ che, in x_0, abbia lo stesso valore di una funzione $y = f(x)$, lo stesso valore della derivata prima e lo stesso valore della derivata seconda. Sia cioè:

$$\begin{cases} f(x_0) = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c \\ f'(x_0) = y'(x_0) = 2ax_0 + b \\ f''(x_0) = y''(x_0) = 2a \end{cases} \qquad \text{si ricava} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{f''(x_0)}{2} \\ b = f'(x_0) - f''(x_0)\,x_0 \\ c = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + \dfrac{f''(x_0)}{2} x_0^2 \end{cases}$$

e quindi l'equazione della parabola cercata è

$$\begin{aligned} y &= \frac{f''(x_0)}{2} x^2 + \left[f'(x_0) - f''(x_0)\,x_0 \right] x + \left[f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + \frac{f''(x_0)}{2} x_0^2 \right] = \\ &= \frac{f''(x_0)}{2} x^2 + f'(x_0)\,x - f''(x_0)\,x_0 x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + \frac{f''(x_0)}{2} x_0^2 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

Si consideri di nuovo la funzione $y = e^x$ e si scriva l'equazione della parabola che nell'origine (x_0=0) abbia le caratteristiche sopra indicate; si ha $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Se si vuol calcolare ancora $e^{0,1}$, si può utilizzare l'equazione della parabola e si ottiene $y(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{1}{2}(0,1)^2 = 1,105$ con un errore

$$\Delta = \left| e^{0,1} - y(0,1) \right| = 0,000170918...,$$

pari allo 0,015%; un errore sulla quarta cifra decimale che per molti calcoli è più che accettabile.

Se si calcola $e^{0,01}$ si ha $\Delta = \left|e^{0,01} - y(0,01)\right| = 0,000000167...$. Con un errore ancora più piccolo.

A questo punto dovrebbe essere evidente che se una funzione $y = f(x)$ è derivabile n volte in un punto x_0, le si può associare un polinomio $P_n(x)$ che, in questo punto, abbia lo stesso valore della funzione e delle sue derivate fino all'ordine n. Si dimostra che il polinomio in questione è dato da:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

<u>NOTA</u> – Il simbolo $n!$ (leggi *enne fattoriale*) indica il prodotto dei primi n numeri naturali, cioè

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(n-1)\cdot n$$

Per definizione $0! = 1$.
Una definizione ricorsiva del fattoriale è:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n\cdot(n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Si ha per esempio che $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

L'errore $\Delta = \left|f(x) - P_n(x)\right|$ che si commette approssimando la funzione con il polinomio viene chiamato anche resto (in genere il resto si indica con $R_n(x)$); si può scrivere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Come si è potuto intuire dall'esempio, il resto diventa sempre più piccolo man mano che aumenta il grado del polinomio approssimante e anche man mano che x si avvicina a x_0.

Vale il seguente teorema di Taylor.

<u>TEOREMA</u> – Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte nell'intervallo (a,b). Siano x e x_0 due punti appartenente a questo intervallo. Si ha:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Dove $P_n(x)$ è detto "polinomio di Taylor" di punto iniziale x_0:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ [i]},$$

in forma compatta

[i] Il simbolo f^n indica la derivata ennesima della funzione $y = f(x)$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{n}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad [ii]$$

Il resto, $R_n(x)$, è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(x-x_0)^n$, cioè:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Un modo molto utile per esprimere il resto $R_n(x)$ è nella cosiddetta "formula di Lagrange". È necessario che la funzione $f(x)$ sia derivabile $n+1$ volte, allora esiste un punto c, tale che $x_0 < c < x$, per cui si ha

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Se nella formula di Taylor $x_0 = 0$ si parla di formula di Mac Laurin:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

<u>ESEMPIO 1</u> – Scomporre il polinomio $y=x^4-5x^3+5x^2+x+2$ secondo le potenze di $x-2$.

Il problema è equivalente a scrivere il polinomio di Taylor di $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+x+2$ nel punto $x_0 = 2$. Si ha:

$f(2)=0$

$f'(x)=4x^3-15x^2+10x+1$ da cui $f'(2)=-7$

$f''(x)=12x^2-30x+10$ da cui $f''(2)=-2$

$f'''(x)=24x-30$ da cui $f'''(2)=18$

$f^{IV}(x)=24$

Il polinomio è quindi: $y=-7(x-2)-\frac{2}{2!}(x-2)^2+\frac{18}{3!}(x-2)^3+\frac{24}{4!}(x-2)^4$, ovvero

$$y=-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$$

◊

<u>ESEMPIO 2</u> – Si calcoli il polinomio di Taylor per la funzione $f(x)=e^x$ di punto iniziale x_0.

Ricordando che la derivata di ordine qualunque di e^x è sempre e^x, si ha: $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k$ e quindi si può scrivere: $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$.

Se $x_0 = 0$ allora si ha:

[ii] Si usa la convenzione $f^0(x_0) = f(x_0)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

◊

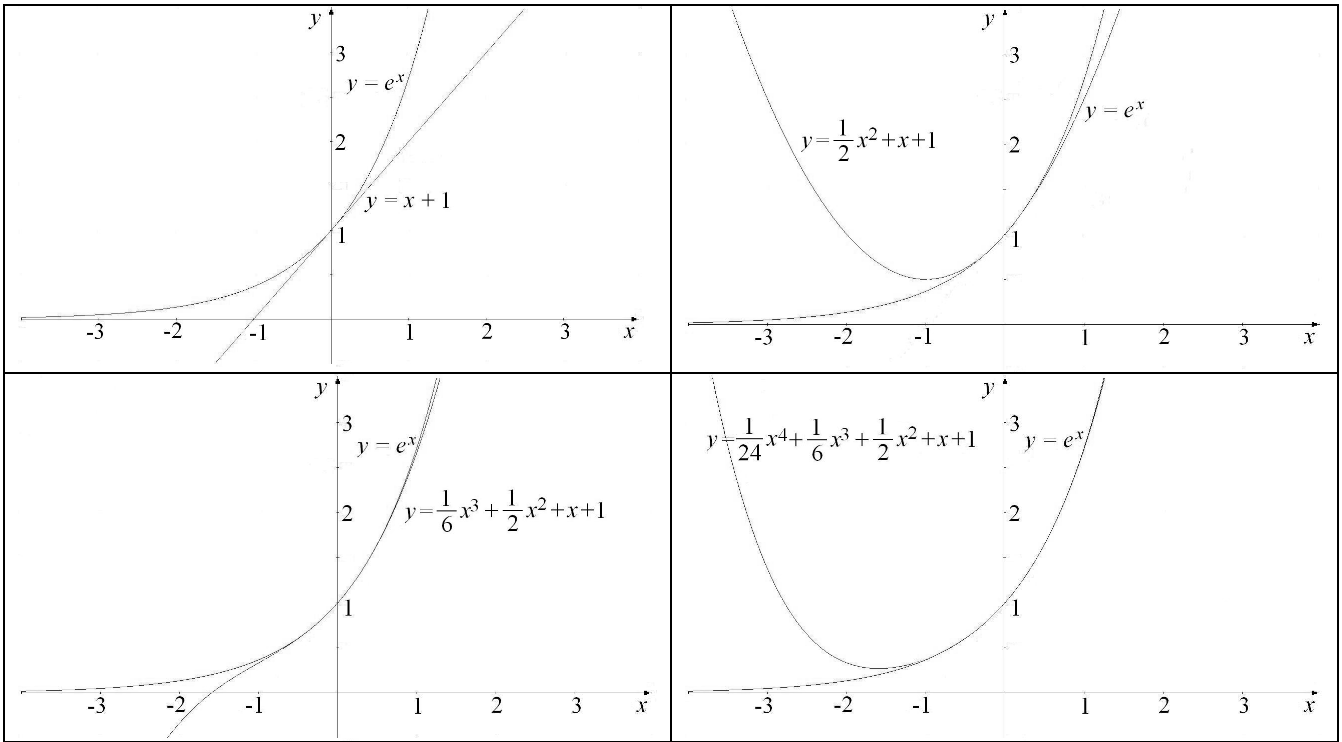

Figura 1 – Le approssimazioni della funzione $f(x) = e^x$ nell'origine con polinomi fino al quarto grado.

ESERCIZI

1 - Si dimostri che valgono le seguenti formule di Mac Luarin.

A) $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$

B) $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$

C) $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$

D) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x)$

E) $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{k}{n}x^n + R_n(x)$ [iii]

2 - Scrivere il polinomio di Mac Laurin del quinto ordine per la funzione $y = \sqrt{1+x}$

[iii] Si ricorda il significato del simbolo $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)}{n!}$ con *k* ed *n* numeri naturali.

L'espressione vale anche per *k* frazionario.

[R. Si osservi che $y=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Si ha $y=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5$]

3 - Scrivere il polinomio $y=x^3-2x^2+3x+5$ secondo le potenze di $x-1$.

[R. $y=7+2(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$]

4 - Scrivere il polinomio $y=x^5+2x^4-x^2+x+1$ secondo le potenze di $x+1$.

[R. $y=(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$]

◊

Facendo uso degli sviluppi di funzioni elementari (quelli dati nell'ESERCIZIO 1) si possono ricavare gli sviluppi di funzioni più complesse.

ESEMPIO 3 – Si determini il polinomio di Taylor del quinto ordine della funzione

$$f(x)=ln(1+senx)$$

nel punto x_0 = 0. Si ponga $z=senx$, si ha $ln(1+senx)=ln(1+z)$ il cui sviluppo è dato nell'ESERCIZIO 1A. Ricordando lo sviluppo di $z=senx$, dato nell'ESERCIZIO 1B, si ha:

$$ln(1+senx)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)^4+...$$

Sviluppando le potenze:

$$f(x)=ln(1+senx)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{24}x^5+...$$

◊

ESERCIZI

5 - Si dimostri che valgono le seguenti formule di Mac Luarin.

A) $xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+...+\frac{x^n}{(n-1)!}+R_n(x)$

B) $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+...+\frac{x^{2n}}{n!}+R_{2n}(x)$

C) $sen\left(x^2\right)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+R_{4n+2}(x)$

D) $ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)+R_{2n+1}(x)$

$\left[\text{Si consiglia di utilizzare } ln\frac{1+x}{1-x}=ln(1+x)-ln(1-x)\right]$

6 - Scrivere il polinomio di Mac Laurin di quinto grado per la funzione $f(x)=e^{arctgx}$.

$\left[\text{R. } e^{arctgx}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\frac{x^5}{24}\right]$

◊

Con degli esempi si vedrà come la formula di Taylor può essere utilizzata per il calcolo dei limiti di alcune forme indeterminate. Per esempio, se $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta la forma indeterminata 0/0, si può sostituire al numeratore e al denominatore i loro polinomi di Taylor di grado opportuno riducendo il rapporto tra le due funzioni al rapporto di due potenze.

<u>ESEMPIO 4</u> – Si calcoli $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{x^3}$

Sostituendo *senx* con il polinomio di Mac Laurin di terzo grado si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+R_3(x)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-\dfrac{x^3}{3!}+R_3(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{x^3}{3!}}{x^3}+\frac{R_3(x)}{x^3}\right)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

Si ricordi che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

◊

<u>ESEMPIO 5</u> – Si calcoli $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{1-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1-x^2}}$

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+R_4(x)$ (nel polinomio per e^x basta mettere al posto di x $-x^2/2$)

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_4(x)$

Non ci si è arrestati al polinomio di secondo grado perché i primi due termini dello sviluppo delle due funzioni sono uguali e dovendo fare la differenza si sarebbe ottenuto zero. Non è necessario andare oltre al quarto grado perché la differenza delle due funzioni è appunto un infinitesimo di quarto grado.

$$\sqrt{1-x^2}=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(-x^2\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2+R_4(x)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+R_4(x)$$

Anche per il denominatore è sufficiente il polinomio di quarto grado. Sostituendo si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{1-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+R_4(x)\right)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_4(x)\right)}{1-\dfrac{1}{2}x^2-\left(1-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+R_4(x)\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{8} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + R_4(x)}{\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{8}x^4 + R_4(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + R_4(x)}{\frac{1}{8}x^4 + R_4(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12} + \frac{R_4(x)}{x^4}}{\frac{1}{8} + \frac{R_4(x)}{x^4}} = \frac{2}{3}$$

Attenzione: al numeratore si aveva $\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+R_4(x)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_4(x)\right)$ e un calcolo puramente algebrico avrebbe dato $\frac{x^4}{12}$ in quanto $R_4(x)$ compare sia con il segno + che con il segno –. Questo però è un errore in quanto $R_4(x)$ significa che la differenza tra la funzione e il polinomio che è stato utilizzato è un infinitesimo superiore al quarto ordine, quindi nei due casi $R_4(x)$ ha lo stesso significato, ma non è lo stesso valore. Il numeratore può essere scritto come un termine di quarto grado più termini di grado superiore.

◊

ESERCIZI

7 - Facendo uso del polinomio di Taylor si calcoli i seguenti limiti:

A) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ [R. 1]

B) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\ln(1+x^2)}$ $\left[\text{R. } \frac{3}{2}\right]$

C) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$ [R. 1]

D) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1-e^{-x^2}}$ [R. 0]

E) $\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}$ $\left[\text{R. } \frac{1}{4}\right]$

◊

Un campo di applicazione del polinomio di Taylor è nelle approssimazioni. Si chiarirà il concetto con degli esempi.

ESEMPIO 6 – Si voglia calcolare il valore del numero di Nepero *e* fino alla sesta cifra decimale, ovvero con un errore minore di 10^{-6}.
Utilizzando lo sviluppo trovato nell'ESEMPIO 2, ponendo $x_0 = 0$ e $x = 1$, si ha:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n .$$

Scrivendo il resto nella forma di Lagrange si ha:

$$R_n = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

con $0 < c < 1$. Da ciò segue che $1 < e^c < e < 3$ quindi $R_n < \dfrac{3}{(n+1)!}$. A questo punto il valore di n per il quale $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$, ovvero $(n+1)! > 3 \cdot 10^6$, soddisfa alla condizione posta. Si verifica facilmente che $10! = 3{,}6288 \cdot 10^6 > 3 \cdot 10^6$ e quindi $n = 9$. Si ha:

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320}+\frac{1}{362880} =$$

$= 2{,}718281525...$ Le prime 6 cifre decimali sono esatte[iv].

◊

<u>ESEMPIO 7</u> – Si vuol calcolare $ln2$ con 5 cifre decimali esatte ovvero con un errore minore di 10^{-5}.

Utilizzando lo sviluppo dell'ESERCIZIO 1A si ha:

$$ln\,2 = ln(1+1) = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1^n}{n} + R_n$$

Il resto nella forma di Lagrange è $|R_n| = \dfrac{\left(\dfrac{1}{1+c}\right)^{n+1}}{n+1}$ con $0 < c < 1$. Poiché il numeratore è massimo per $c = 0$ si ha $|R_n| < \dfrac{1}{n+1}$. Il valore di n per il quale $\dfrac{1}{n+1} < 10^{-5}$, ovvero $n+1 > 10^5$, è $n = 99999$.
Per risolvere il problema posto sarebbe necessario calcolare:

$$ln\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... + \frac{1}{99999}$$

Calcolo del tutto improponibile da farsi a mano.
Con calcoli analoghi a quelli svolti sopra, si dimostra che se si vuole un errore minore di 10^{-n}, è necessario prendere il polinomio fino al grado $10^n - 1$.

Il calcolo si accelera se si utilizza lo sviluppo dell'ESERCIO 4D. Tenendo presente che $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ per $x = \dfrac{1}{3}$ si ha:

$$ln\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} ... + \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\right) + R_{2n+1}$$

Per stimare il resto si osservi che:

$$R_{2n+1} = 2\left(\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}} + ...\right) < \frac{2}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + ...\right) \text{[v]}$$

e quindi $R_{2n+1} < \dfrac{2 \cdot 9}{8 \cdot (2n+3) \cdot 3^{2n+3}} = \dfrac{1}{4 \cdot (2n+3) \cdot 3^{2n+1}}$, da ciò segue che deve essere

---

[iv] Il valore di e con 10 cifre decimali esatte è 2,7182818284.

[v] $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^4} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^2}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione 1/9 e la sua somma è $\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}} = \dfrac{9}{8}$. In generale la somma di infiniti termini del tipo $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, se $|a| < 1$, allora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

$\frac{1}{4\cdot(2n+3)\cdot 3^{2n+1}}<10^{-5}$, ovvero $4\cdot(2n+3)\cdot 3^{2n+1}>10^{5}$, e quindi $n = 4$. Per cui

$$ln2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}+\frac{1}{15309}+\frac{1}{177147}\right)=0,693146...\text{[vi]}$$

◊

ESEMPIO 8 – Si vuol calcolare $cos(0,1)$[vii] con 5 cifre decimali esatte ovvero con un errore minore di 10^{-5}.

Utilizzando lo sviluppo dell'ESERCIZIO 1C si ha:

$$cos(0,1)=1-\frac{0,1^2}{2}+\frac{0,1^4}{24}-...+(-1)^n\frac{0,1^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(0,1)$$

Il resto nella forma di Lagrange è $\left|R_{2n}(0,1)\right|=\frac{\left|D^{2n+1}[cos\,x]\right|_{x=c}}{(2n+1)!}(0,1)^{2n+1}$ con $0 < c < 0,1$. Bisogna quindi da valutare il valore assoluto della derivata $(2n+1)$–esima di $cosx$ in un punto compreso tra 0 e 0,1. Tale derivata è $|senx|$ e si avrà $\left|D^{2n+1}[cos\,x]\right|_{x=c}=|senc|<1$. Da cui $\left|R_{2n}(0,1)\right|<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1}=\frac{1}{10^{2n+1}\cdot(2n+1)!}$. Deve essere $\frac{1}{10^{2n+1}\cdot(2n+1)!}<10^{-5}$, ovvero $10^{2n+1}\cdot(2n+1)!>10^{5}$, da cui $n = 2$. Si ha quindi

$$cos(0,1)=1-\frac{0,1^2}{2}+\frac{0,1^4}{24}=1-\frac{1}{200}+\frac{1}{240000}=0,9950041666...\text{[viii]}$$

◊

ESERCIZI

8 - Calcolare i seguenti valori con l'errore a fianco indicato:
   A) $\sqrt{e}$ con l'errore di 10^{-5}
   B) $sen(0,1)$ con l'errore di 10^{-5}
   C) $ln3$ con l'errore di 10^{-5}.

9 - Facendo uso dello sviluppo di $arctgx$ dato nell'ESERCIZIO 1D e del fatto che $arctg1=\frac{\pi}{4}$, si calcoli π con un errore di 10^{-5}.

10 - Si calcoli $\sqrt{2}$ con un errore di 10^{-5}. [Si faccia uso dello sviluppo di $(1+x)^k$ dato nell'ESERCIZIO 1E, ponendo $x = 1$ e $k = ½$]

◊

[vi] $ln2$ con 10 cifre decimali esatte è 0,6931471805
[vii] si intende 0,1 radianti (circa 5,73°)
[viii] $cos(0,1)$ con 10 cifre decimali esatte è 0,9950041652. Si può osservare che nel risultato che si è ottenuto, le cifre decimali esatte sono 8; ciò è dovuto alla maggiorazione della derivata $(2n+1)$–esima. In questo caso con $n = 1$ si sarebbe ottenuto $cos(0,1) = 0,995000$ che andava bene lo stesso. Ma in genere ciò non accade.