Concetto di differenziale e suo significato geometrico

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile: si dia al valore generico x un incremento Δx, la funzione passerà dal valore $f(x)$ al valore $f(x + \Delta x)$ subendo l'incremento $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Essendo la funzione continua, perché derivabile, quando $\Delta x \to 0$ anche $\Delta y \to 0$. L'incremento della funzione è quindi infinitesimo con l'incremento della variabile indipendente.

Se si confrontano i due infinitesimi Δx e Δy, cioè se si valuta il limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, nell'ipotesi di derivabilità della funzione si ha $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ che assume un valore finito; quindi si ottiene che Δy è infinitesimo o di ordine superiore a Δx (se $f'(x) = 0$) o dello stesso ordine di Δx (se $f'(x) = 0$). Si può quindi scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

Moltiplicando per Δx si ha:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Tale espressione scompone l'infinitesimo Δy nella somma della sua parte principale $f'(x) \cdot \Delta x$ e nell'infinitesimo $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ di ordine superiore rispetto all'infinitesimo Δx.

La parte principale dell'incremento di una funzione si dice differenziale della funzione e si indica con $df(x)$ (o, che è lo stesso con dy):

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \,.$$

In particolare per la funzione $f(x) = x$ si ha

$$f'(x) = 1 \qquad \text{quindi} \qquad dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento. Sostituendo il risultato ora ottenuto nell'espressione sopra si ha:

$$df(x) = f'(x)\,dx \,.$$

Si ha la seguente definizione di differenziale

<u>DEFINIZIONE</u> – **il differenziale di una funzione, in un punto in cui la funzione è derivabile, è il prodotto della derivata in quel punto per l'incremento della variabile indipendente.**

Si ricava quindi che $\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ e si può quindi affermare che: *il differenziale di una funzione differisce dall'incremento della funzione di una quantità infinitesima di ordine superiore all'incremento della variabile indipendente.*

Questa proprietà giustifica una delle prerogative del differenziale: quella di sostituire, trascurando infinitesimi di ordine superiore, l'incremento della funzione. A meno di infinitesimi di ordine superiore, si può quindi porre $\Delta y = dy$.

<u>ESEMPIO 1</u> – Si scriva il differenziale della funzione $y = x^2 + senx$.
Si ha: $dy = (2x + \cos x)\,dx$

◊

<u>ESEMPIO 2</u> – Sfruttando il concetto di differenziale di calcioli $\sqrt{4{,}3781}$.
In questo caso la caso la funzione è $y = f(x) = \sqrt{x}$. Si tratta di calcolare $f(4{,}3781) = f(4 + 0{,}3781)$, essendo quindi $x = 4$ e $\Delta x = 0{,}3781$.
Poiché $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, si ha, $dy = f'(x)\,dx = \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\Delta x = \frac{1}{4}\cdot 0{,}3781$.
Si ha quindi $\Delta y = f(4{,}3781) - f(4) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}3781 + \sigma$, dove σ dove a rappresenta, nel calcolo numerico, l'errore $\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$ che si commette ponendo $\Delta y = dy$. Pertanto:

$$f(4{,}3781) = f(4) + \frac{1}{4}\cdot 0{,}3781 + \sigma$$
$$\sqrt{4{,}3781} = 2 + 0{,}094525 + \sigma$$
$$\sqrt{4{,}3781} \simeq 2{,}094525$$

Le prime dieci cifre decimali di $\sqrt{4{,}3781}$ sono 2,0923909768. si può quindi osservare che le prime due cifre del calcolo approssimato sono esatte.

◊

Si darà ora una interpretazione geometrica del differenziale.
Si consideri la curva di equazione $y = f(x)$ e la tangente nel punto $P(x, f(x))$ e sia Q il punto della curva di coordinate $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Dalla figura 1 si ha:

$$\Delta y = \overline{MQ} = \overline{MT} + \overline{TQ}$$

Nel triangolo rettangolo *PMT* si ha:

$$\overline{MT} = \overline{PM}\cdot tg\alpha = \Delta x \cdot f'(x)$$

quindi

$$\overline{MT} = df(x) = dy$$

cioè il segmento *MT* rappresenta geometricamente il differenziale *dy*.
Si può verificare che queste considerazioni geometriche valgono per qualunque funzione derivabile.

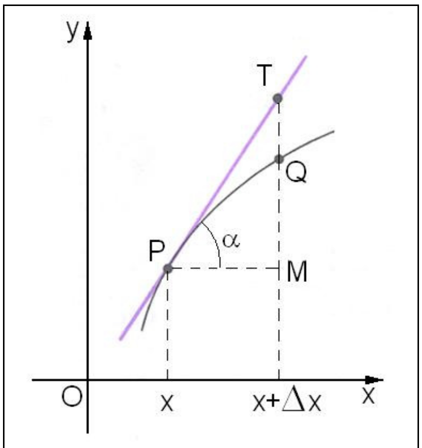

Figura 1 - Significato geometrico del differenziale.

Il differenziale di una funzione, in un punto $P(x, f(x))$ relativo all'incremento Δx, rappresenta quindi la lunghezza del segmento staccato sulla parallela all'asse *y*, condotta per il punto $(x + \Delta x, 0)$, dalla parallela all'asse *x* condotta per *P*, e dalla tangente alla curva in *P*; in altre parole è l'incremento che subisce la tangente alla curva nel passaggio da x a $x + \Delta x$.

La figura 1 indica pure che Δy differisce dal differenziale dy per la quantità TQ che tende a zero quando Δx tende a zero; perciò se si pensa fisso il punto P e si fa muovere sul grafico il punto Q in modo che si avvicini indefinitamente a P, allora i valori

$$\overline{PM} = \Delta x; \qquad \overline{MQ} = \Delta y; \qquad \overline{MT} = dy; \qquad \overline{TQ} = o(\Delta x)\cdot\Delta x$$

tendono a zero, ma TQ svanisce più rapidamente degli altri, quindi può essere trascurato e il differenziale può sostituire l'incremento della funzione; in altre parole l'arco PQ di curva può essere approssimato dal segmento PT di tangente, purché Q sia sufficientemente vicino a P.

ESERCIZI

1 - Si scriva il differenziale delle seguenti funzioni:

A) $y = \dfrac{3(x+1)}{3-2x}$ $\left[\text{R. } dy = \dfrac{15}{(3-2x)^2}dx\right]$

B) $y = x^2 + senx$ $\left[\text{R. } dy = (2x + cos\,x)\,dx\right]$

C) $y = \sqrt{x^2+5x}$ $\left[\text{R. } dy = \dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}dx\right]$

D) $y = \sqrt{1-e^x}$ $\left[\text{R. } dy = \dfrac{e^x}{2\sqrt{(1-e^x)}}dx\right]$

E) $y = arctg\sqrt{x}$ $\left[\text{R. } dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx\right]$

2 - Si calcoli in modo approssimato $\sqrt{9{,}1635}$ $\left[\text{R. } \sqrt{9{,}1635} = 3{,}02725\right]$

3 - Si calcoli in modo approssimato $(3{,}4103)^2$ $\left[\text{R. } (3{,}4103)^2 = 11{,}4618\right]$

4 - Si calcoli di quanto varia l'area s di un triangolo equilatero aumentando di un millesimo la lunghezza l del suo lato e confrontare tale variazione con il differenziale della funzione area, relativamente agli stessi valori. $\left[\text{R. } \Delta s = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2\left(2\cdot10^{-3}+10^{-6}\right);\ ds = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2\left(2\cdot10^{-3}\right)\right]$

5 - Si calcoli approssimativamente di quanto il volume di una sfera di 25 cm di raggio quando questo aumenta di 3 mm. [R. 750π cm^3]