MODULO 3

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI

- DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ IN UN PUNTO – Una funzione $y = f(x)$ si dice continuo in un punto x_0 appartenente al dominio di f, se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ciò significa che (1) esiste $f(x_0)$, (2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e (3) $l = f(x_0)$.
  - Dimostrare che $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \le 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ è continua in $x = 0$ mentre le funzione $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \le 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ non lo è.
- DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ IN UN INTERVALLO – Una funzione $y = f(x)$ si dice continuo in un intervallo (a,b) contenuto nel dominio di f, se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in (a,b)$.
  - I polinomi, le funzioni $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$ sono continue in tutto R.
  - Le funzioni razionali fratte sono continue in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore.
  - La funzione $y = tgx$ è continua per ogni $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$
  - La funzione $y = \ln x$ è continua nel suo dominio.
- TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE:
  - Teorema di Weierstrass – Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora la funzione ammette un massimo e un minimo assoluti.
  - Teorema di Bolzano – Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora ammette almeno un volta tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo.
  - Teorema dell'esistenza degli zeri – Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e assume valori opposti agli estremi dell'intervallo, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui la funzione si annulla.

- Operazioni con le funzioni continue: se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue, allora anche $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ e $f(x)\cdot g(x)$ lo sono; la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in tutti i punti in cui si ha $g(x)\neq 0$.
- Teorema della funzione inversa – Se $y=f(x)$ è una funzione continua in un insieme *D* e è ivi invertibile, allora la funzione inversa è continua nell'insieme *f*(*D*).
- Teorema sulla continuità delle funzioni composte – Sia data la funzione $y=f\left[g(x)\right]$; se $\lim_{x\to x_0} g(x)=l$ (*l* valore finito) e se $y=f(x)$ è una funzione continua per $x = l$, allora $\lim_{x\to x_0} f\left[g(x)\right]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(l)$ Se poi $y=g(x)$ è continua per $x = x_0$, allora $y=f\left[g(x)\right]$ è anche continua.

- PUNTI DI DISCONTINUITÀ
  - prima specie: limiti sinistro e destro finiti, ma $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
  - seconda specie quando non esiste o non è finito almeno uno dei due limiti destro e sinistro
  - terza specie o eliminabile quando esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, ma $f(x_0)$ o non esiste o non è uguale ad *l*.