MODULO 2

LIMITI DELLE FUNZIONI

➢ APPROCCIO INTUITIVO

- Esempio 1: $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \begin{cases} 2x+1 & x \neq 1 \\ \nexists & x = 1 \end{cases}$

x	$y = f(x)$
1–1/10	2,8
1–1/100	2,98
1–1/1000	2,998
1–1/10000	2,9998
…	…
1	$f(1)$ non esiste
…	…
1+1/10000	3,0002
1+1/1000	3,002
1+1/100	3,02
1+1/10	3,2

- Esempio 2: $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	$y = f(x)$
…	…
–10000	1,0001
–1000	1,001
–100	1,01
–10	1,1
+10	0,9
+100	0,99
+1000	0,999
+10000	0,9999
…	…

- Esempio 3: $y = f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

x	$y = f(x)$
1–1/10	–10
1–1/100	–100
1–1/1000	–1000
1–1/10000	–10000
…	…
1	$f(1)$ non esiste
…	…
1+1/10000	10000
1+1/1000	1000
1+1/100	100
1+1/10	10

- Esempio 4: $y = f(x) = x^3$

x	$y = f(x)$
…	…
–10000	-10^{12}
–1000	-10^{9}

-100	-10^6
-10	-10^3
$+10$	$+10^3$
$+100$	$+10^6$
$+1000$	$+10^9$
$+10000$	$+10^{12}$
…	…

- DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
  - Esempio: Verificare che $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x-3} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} (ax+b) = ax_0 + b$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

- DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE ALL'INFINITO: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$
  - Esempio: Verificare che $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{k}{x} = 0 \quad k \neq 0$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ non esiste
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0^+$ se $0 < a < 1$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+$ se $a > 1$

- DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$
  - Esempio: Verificare che $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-1}{x-1} = \infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$

- DEFINIZIONE DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER x CHE TENDE ALL'INFINITO: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - Esempio: Verificare che $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ se $a > 1$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ se $0 < a < 1$

- TEOREMI GENERALI SUI LIMITI (LIMITI FINITI)
  - Teorema di unicità del limite – Se, per $x \to x_0$ la funzione $f(x)$ ammette un limite, questo è unico.
  - Teorema della permanenza del segno – Se, per $x \to x_0$ la funzione $f(x)$ tende al limite finito l diverso da zero, esiste un intorno di x_0 per tutti i punti del quale, escluso al più x_0, i valori della funzione hanno lo stesso segno del limite.
  - Teorema – Se in un intorno del punto x_0, escluso al più $x = x_0$, la funzione $f(x)$ è positiva o nulla ed ammette limite l per $x \to x_0$, allora $l \geq 0$.
  - Teorema – Se in un intorno del punto x_0, escluso al più $x = x_0$, la funzione $f(x)$ è negativa o nulla ed ammette limite l per $x \to x_0$, allora $l \leq 0$.
  - Teorema del confronto – Se due funzione $g(x)$ e $h(x)$ tendono allo stesso limite l per $x \to x_0$, ed una terza funzione $f(x)$ è tale che, in un certo intorno di x_0, escluso al più x_0, si abbia
    $$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$
    allora anche $f(x)$ tende ad l $x \to x_0$.
  - Teorema sul limite del modulo di una funzione – Se, $\lim f(x) = l$, allora $\lim |f(x)| = |l|$

- Teorema – Il limite della somma o della differenza di due funzioni è uguale alla somma o alla differenza dei limiti, ovvero: se $lim\, f_1(x) = l_1$ e $lim\, f_2(x) = l_2$, allora $lim\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = l_1 \pm l_2$
- Teorema – Il limite del prodotto di una costante per una funzione è uguale alla costante per il limite della funzione, cioè: $lim\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot lim\, f(x) = k \cdot l$
- Osservazione – Il limite è un operatore lineare: $lim\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\right] = kl_1 + kl_2$
- Teorema – Il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei limiti, cioè: se $lim\, f_1(x) = l_1$ e $lim\, f_2(x) = l_2$, allora $lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = l_1 \cdot l_2$
- LIMITI INFINITI
  - se $lim\, f_1(x) = l$ e $lim\, f_2(x) = \pm\infty$, si ha $lim\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \pm\infty$ e $lim\left[f_1(x) - f_2(x)\right] = \mp\infty$
  - se $lim\, f_1(x) = +\infty$ e $lim\, f_2(x) = +\infty$, si ha $lim\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = +\infty$
  - se $lim\, f_1(x) = -\infty$ e $lim\, f_2(x) = -\infty$, si ha $lim\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = -\infty$
  - se $lim\, f_1(x) = +\infty$ e $lim\, f_2(x) = -\infty$, si ha $lim\left[f_1(x) - f_2(x)\right] = +\infty$ e $lim\left[f_2(x) - f_1(x)\right] = -\infty$ nulla si può dire nel caso $lim\left[f_1(x) + f_2(x)\right]$, si dice che si è in presenza di una forma indeterminata $\left[+\infty - \infty\right]$.
  - se $lim\, f_1(x) = l \neq 0$ e $lim\, f_2(x) = \infty$, si ha $lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \infty$, per il segno vale la solita regola del prodotto dei segni
  - se $lim\, f_1(x) = \infty$ e $lim\, f_2(x) = \infty$, si ha $lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \infty$, per il segno vale la solita regola del prodotto dei segni
  - nulla si può dire quando uno dei fattori tende a zero e l'altro tende all'infinito; si ha una forma indeterminate del tipo $\left[0 \cdot \infty\right]$.

- TEOREMA – Se n è un numero intero positivo e $\lim f(x) = l$ (l finito), allora $\lim \left[f(x) \right]^n = \left[\lim f(x) \right]^n = l^n$
- TEOREMA – Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (finito e diverso da zero), allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$
- TEOREMA – Se la funzione $f(x)$ tende a zero, allora la funzione $\dfrac{1}{f(x)}$ tende all'infinito.
- TEOREMA – Se la funzione $f(x)$ tende all'infinito, allora la funzione $\dfrac{1}{f(x)}$ tende a zero.
- TEOREMA – Il limite del quoziente di due funzioni, la seconda delle quali tenda ad un limite diverso da zero, è uguale al quoziente dei limiti.

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim \left[f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)} \right] = \lim f_1(x) \cdot \lim \frac{1}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}$$

- Osservazione
  - se $\lim f_1(x) = l \neq 0$ e $\lim f_2(x) = 0$, si ha $\lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$
  - se $\lim f_1(x) = \infty$ e $\lim f_2(x) = l$, si ha $\lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$
  - se $\lim f_1(x) = l$ e $\lim f_2(x) = \infty$, si ha $\lim \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$
  - nulla si può dire del limite di $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ quando entrambe le funzioni tendo a zero o entrambe tendono all'infinito; si hanno allora le forme in indeterminate del tipo $\left[\dfrac{0}{0} \right]$ e $\left[\dfrac{\infty}{\infty} \right]$.
  - $\lim \left[f(x) \right]^{g(x)}$ può produrre la forma indeterminata $\left[1^{\infty} \right]$

- TEOREMA – Se $\lim f(x) = l$ ($l \geq 0$), allora $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ se ($l < 0$) allora il teorema vale solo per n dispari.

➢ LIMITI NOTEVOLI

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{m-n} = \begin{cases} \infty & m > n \\ \frac{a_0}{b_0} & m = n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (x_0 può essere anche infinito) allora

  $$\lim_{x\to x_0} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

- Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (x_0 può essere anche infinito) allora

  $$\lim_{x\to x_0} (1+f(x))^{1/f(x)} = e$$

- Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (x_0 può essere anche infinito) allora

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ (x_0 può essere anche infinito) allora
  $$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$$

- INFINITESIMI E LORO CONFRONTO
  - Definizione: Una funzione $y=f(x)$ si dice infinitesima per $x\to x_0$ (x_0 può essere anche ∞) se si ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$
  - Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, infinitesime per $x\to x_0$, si può avere: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0\\ l\\ \infty\end{cases}$ nel primo caso si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$, nel secondo caso si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine, nel terzo caso che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$.
  - Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ infinitesime per $x\to x_0$, si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α ($\alpha>0$) rispetto a $\varphi(x)$, assunto come *infinitesimo campione* o *principale*, se si ha: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\left[\varphi(x)\right]^{\alpha}}=l\neq 0$. Si assumono come infinitesimi campione
    $$\begin{cases}\varphi(x)=x & x\to 0\\ \varphi(x)=\frac{1}{x} & x\to\infty\\ \varphi(x)=x-x_0 & x\to x_0\end{cases}$$
  - Analoghe considerazioni possono essere fatte per gli infiniti Definizione: Una funzione $y=f(x)$ si dice infinita per $x\to x_0$ (x_0 può essere anche ∞) se si ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$
  - Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, infinite per $x\to x_0$, si può avere: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\infty\\ l\\ 0\end{cases}$ nel primo caso si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$, nel secondo caso si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine, nel terzo caso che $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$.

- Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ infinite per $x \to x_0$, si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine α $(\alpha > 0)$ rispetto a $\varphi(x)$, assunto come *infinito campione* o *principale*, se si ha: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{[\varphi(x)]^{\alpha}} = l \neq 0$. Si assumono come infiniti campione $\begin{cases} \varphi(x) = x & x \to \infty \\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x} & x \to 0 \\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x - x_0} & x \to x_0 \end{cases}$