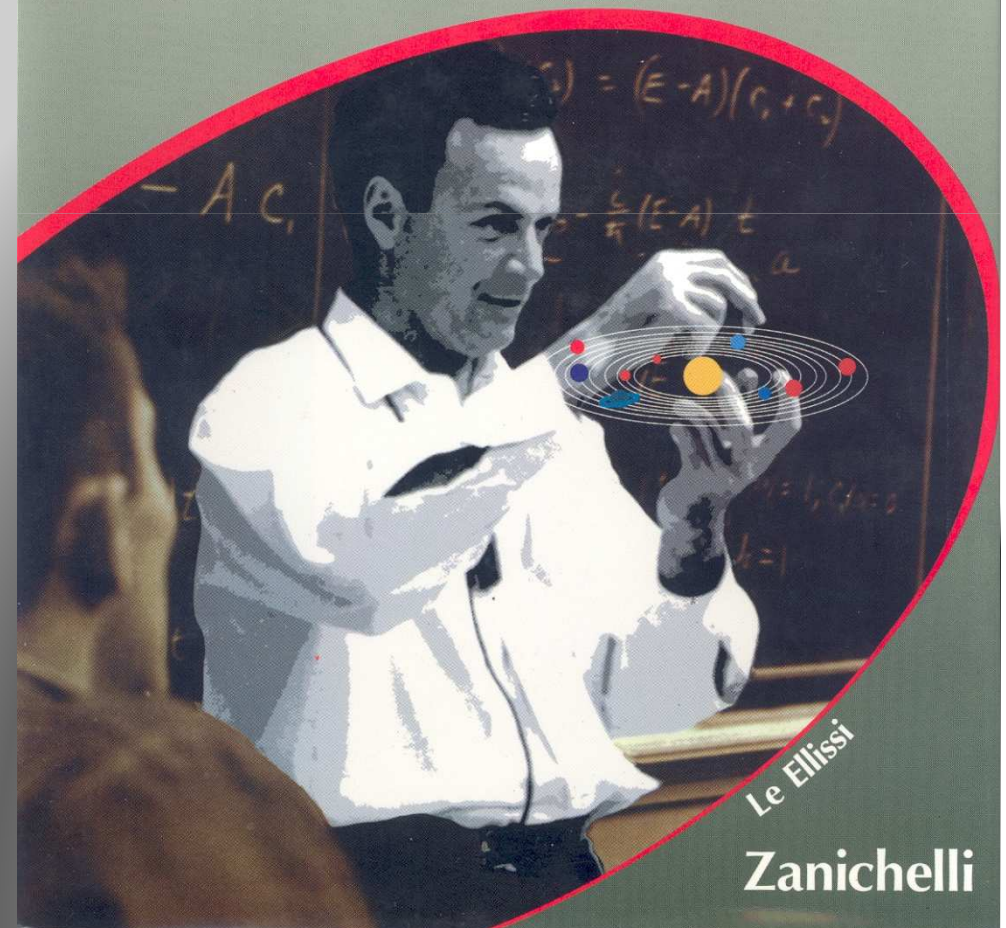


**La legge
della
gravitazione
universale di
Newton
e le leggi di
Keplero**

D.L. Goodstein J.R. Goodstein

**IL MOTO DEI PIANETI
INTORNO AL SOLE**

Una lezione inedita di Richard Feynman



IL MOTO DEI PIANETI INTORNO AL SOLE

Una lezione di Richard Feynman

La lezione fu tenuta al Caltech (California Institute of Technology) il 13 marzo 1964.

La lezione si sviluppa nei seguenti punti:

1. un'introduzione storica al problema;
2. una descrizione di alcune proprietà geometriche di un'ellisse;
3. dimostrazione di Newton che se un pianeta descrive un'orbita mediante una forza diretta verso il sole allora vale la seconda legge di Keplero;
4. dimostrazione di Feynman che ad uguali variazioni della velocità corrisponde una uguale variazione degli angoli nell'orbita;
5. dimostrazione di Feynman, usando le tecniche di Fano, che questi cambiamenti di velocità implicano che l'orbita sia ellittica;
6. discussione sugli esperimenti del Rutherford con la dispersione delle particelle di alfa e la scoperta del nucleo atomico.

L'IDEA

L'idea di fondo, suggerita a Newton da Halley, è che il moto di un pianeta intorno al sole è dovuto alla competizione tra la tendenza del pianeta a muoversi a velocità costante lungo una linea retta, se non ci sono forze agenti su di esso, (principio di inerzia) e il moto dovuto alla forza di gravità che è diretta verso il Sole.

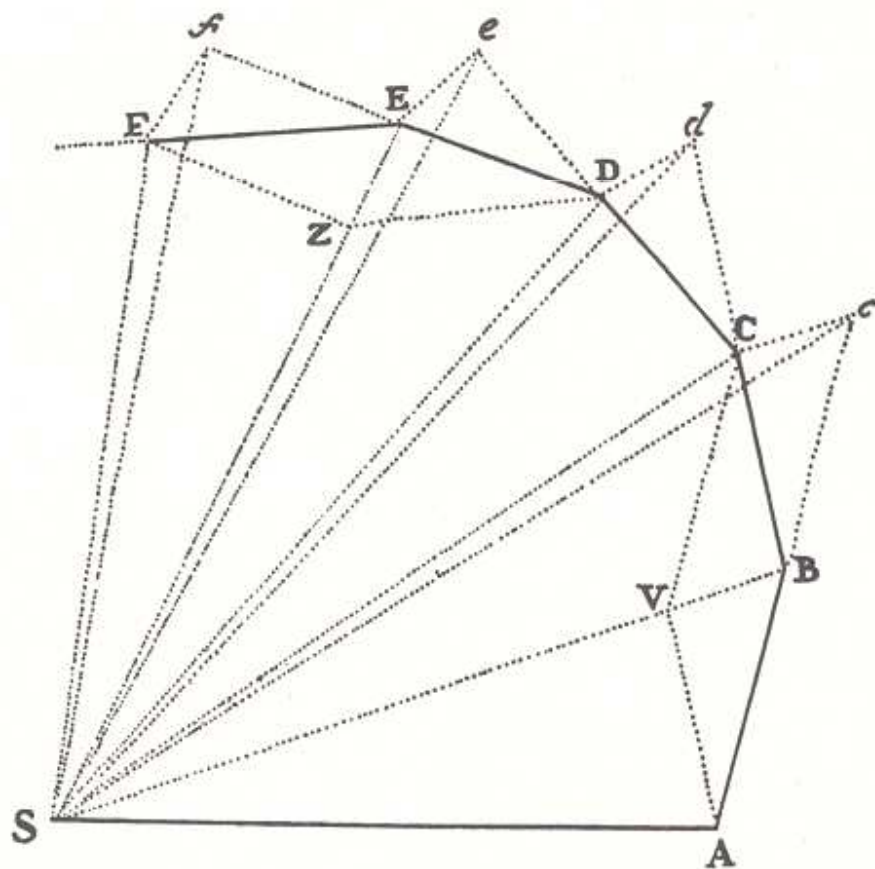


Diagramma di Newton

LE LEGGI DI NEWTON

1. Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.
2. Una forza impressa ad un corpo ne modifica il moto secondo la legge $F = m \cdot a$, ovvero

$$F \sim \Delta v / \Delta t.$$

1. Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

L'IDEA

In realtà questi effetti danno luogo ad un'orbita rappresentata da una curva regolare, ma per la sua analisi Newton la considerò come una spezzata (ABCDEF) formata da una serie di segmenti di retta dovuti all'inerzia interrotti da improvvisi cambiamenti di direzione dovuti all'applicazione della forza del sole per un tempo molto breve.

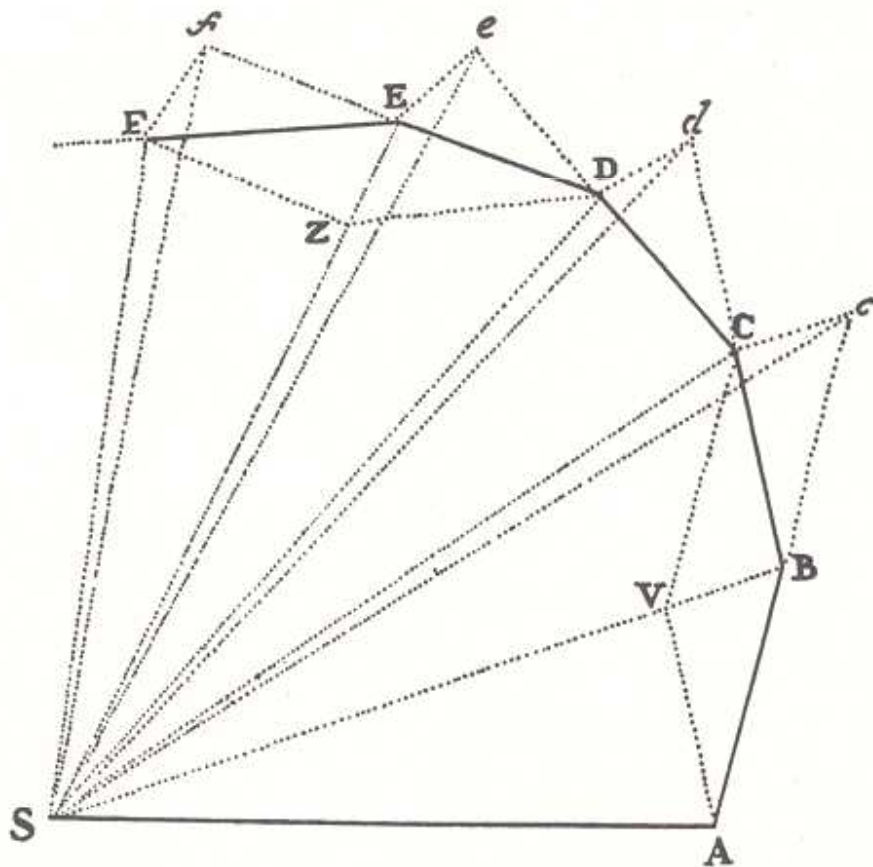
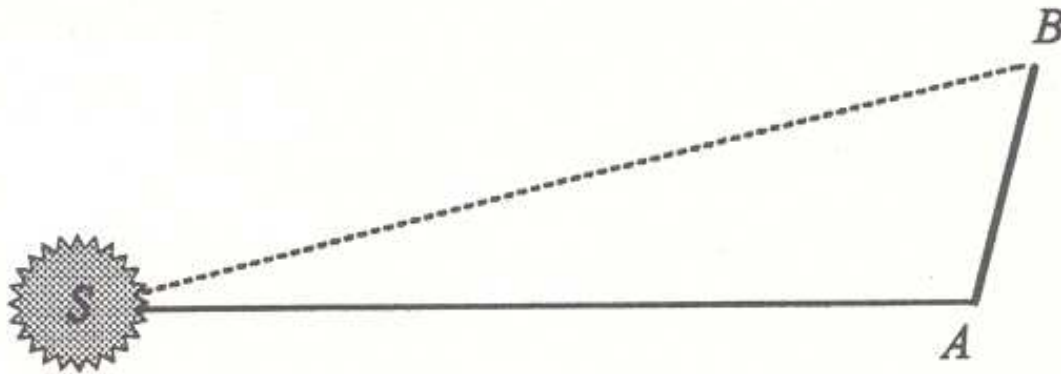


Diagramma di Newton

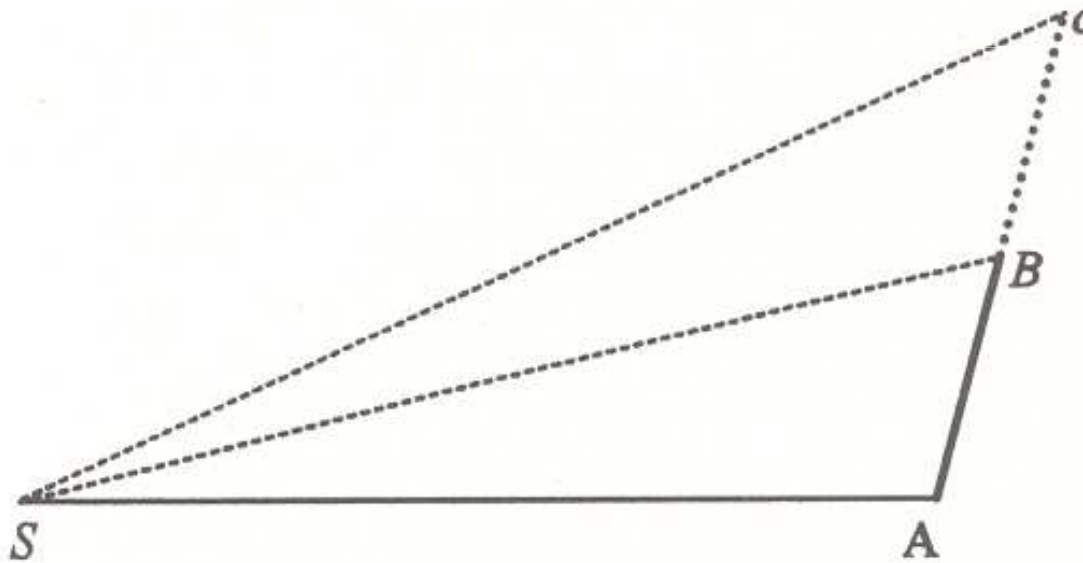
L'IDEA

In un certo intervallo di tempo il pianeta si muove da A fino a B, se non ci fosse alcuna forza ad agire su di esso.



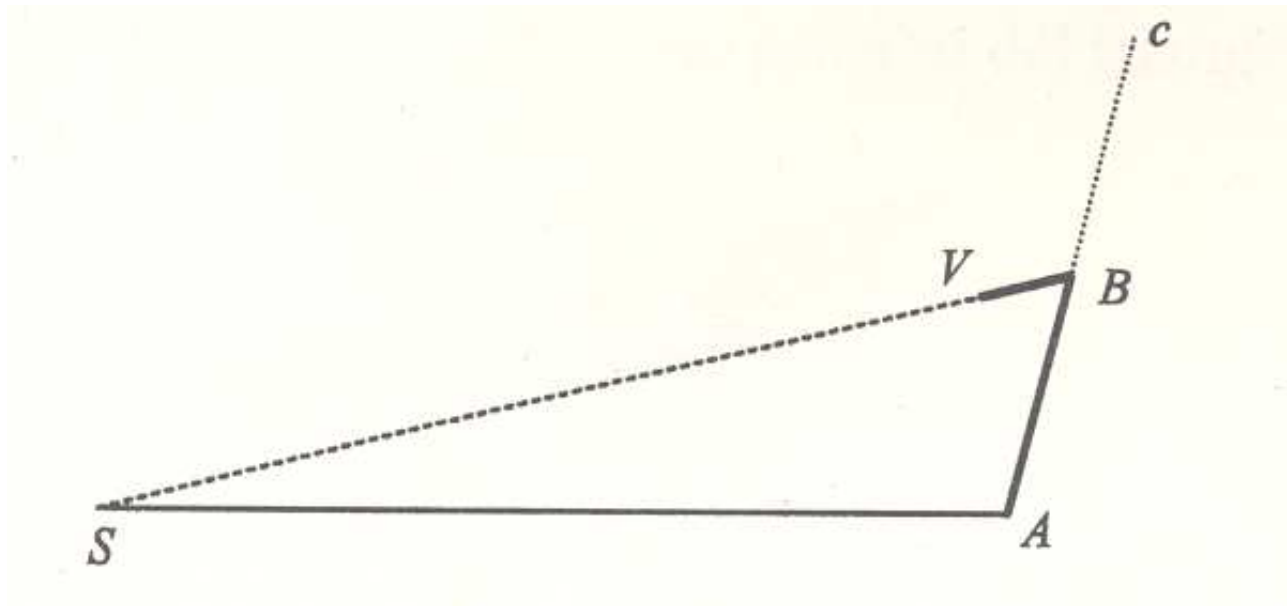
L'IDEA

In un intervallo successivo, di ugual durata, sempre se non ci fosse alcuna forza, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una ugual distanza Bc.



L'IDEA

Il sole esercita una forza, che agisce in realtà in modo continuo, che rappresentiamo con un impulso, applicato nel punto B, che dà origine ad una componente del moto diretta verso il sole, BV.

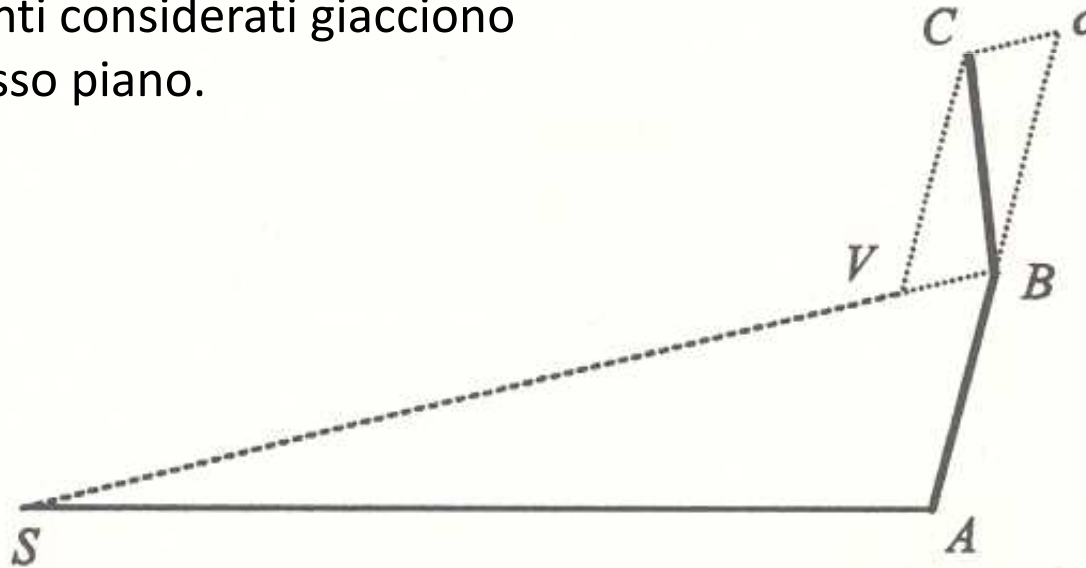


L'IDEA

Il moto dovuto alla combinazione dei due effetti è il segmento BC , diagonale del parallelogramma $VBcC$.

OSSERVAZIONI:

- 1) il segmento cC non è diretto verso il sole, ma è parallelo al segmento BV che invece è diretto verso il sole.
- 2) Tutti i punti considerati giacciono sullo stesso piano.

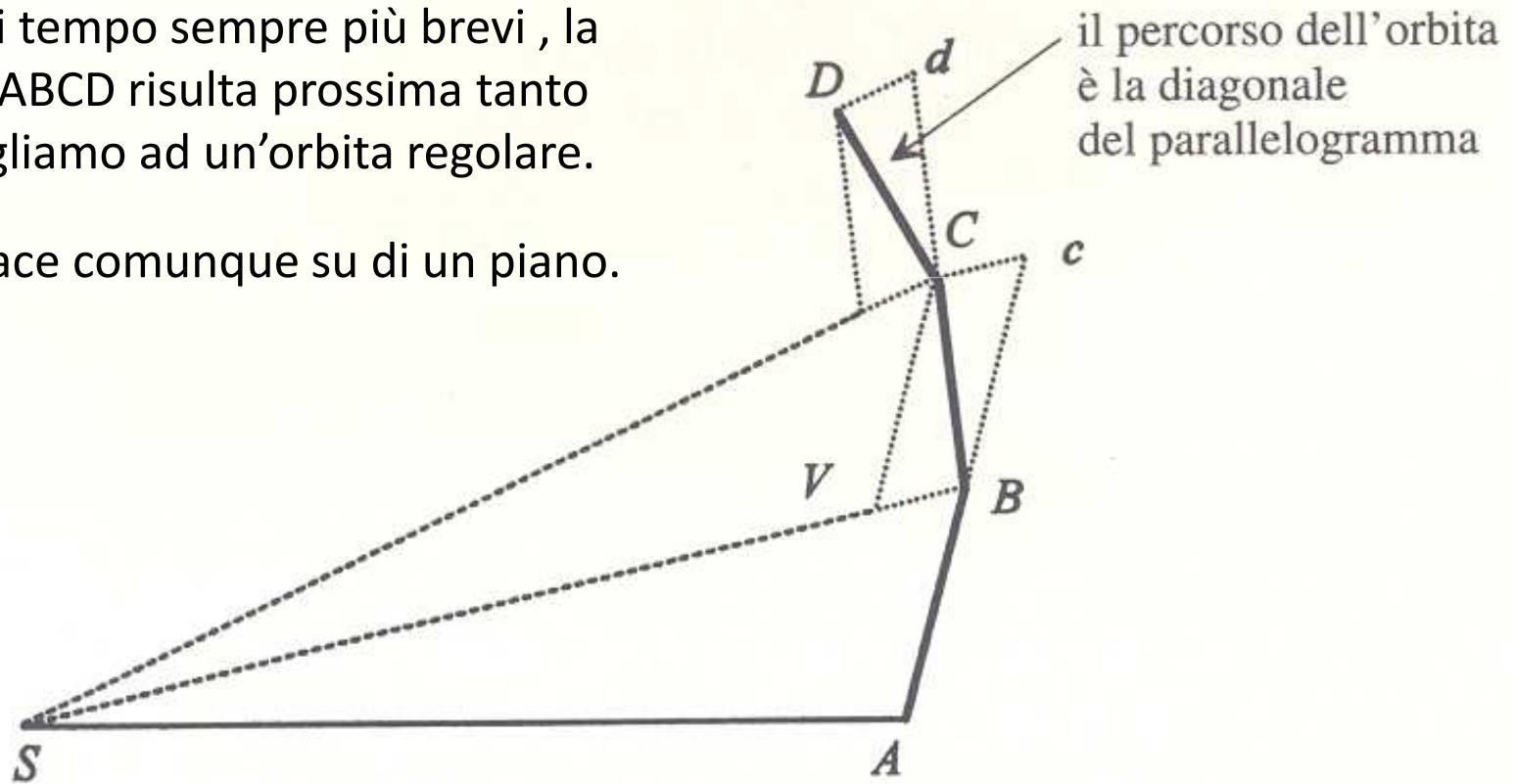


L'IDEA

Si può ripetere la stessa procedura ad ogni punto e il passo successivo la traiettoria avrà l'aspetto di figura.

Applicando lo stesso ragionamento ad intervalli di tempo sempre più brevi, la traiettoria ABCD risulta prossima tanto quanto vogliamo ad un'orbita regolare.

L'orbita giace comunque su di un piano.

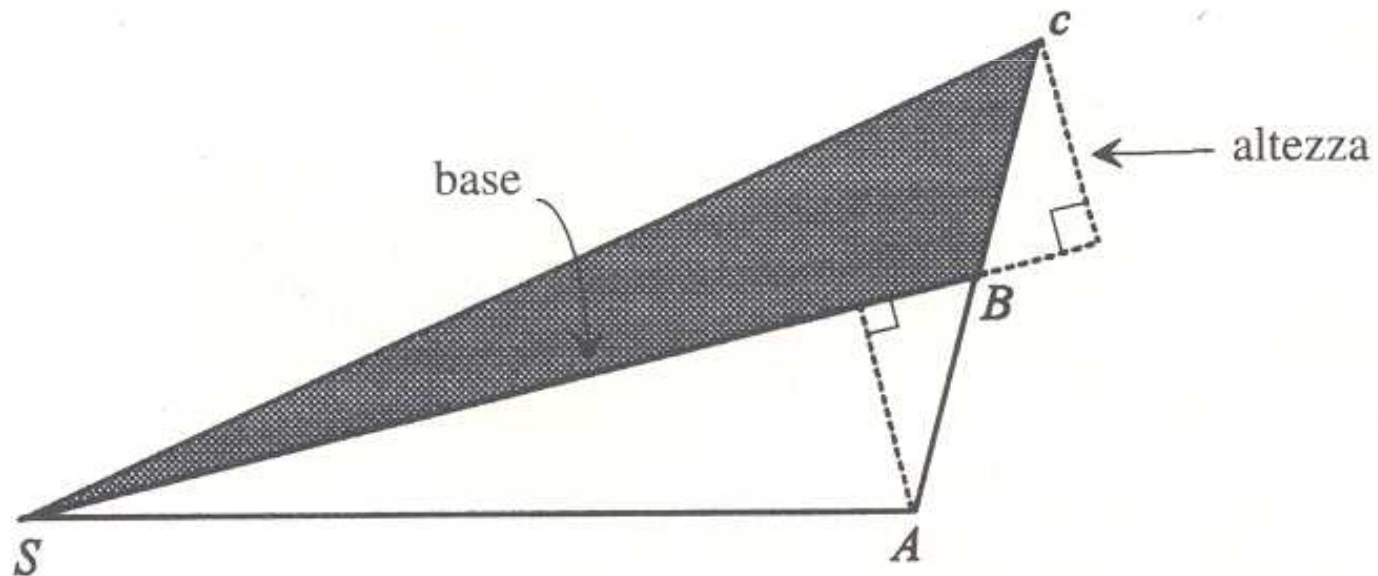


LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Newton (e Feynman) dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

In altre parole il triangolo SAB e SBC hanno la stessa area.

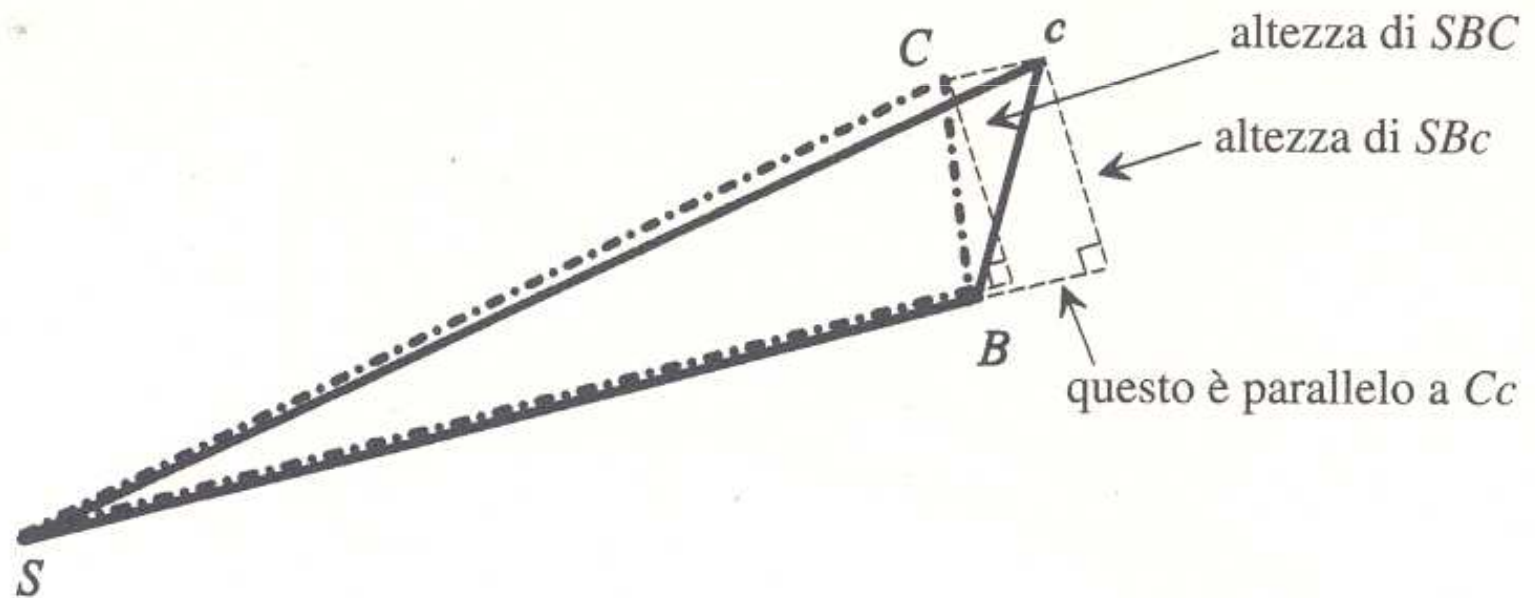
Per fare ciò, per prima cosa dimostra che SAB ha la stessa area di SBc, quindi . . .



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

. . . che SBc ha la stessa area di SBC .

La linea che congiunge il sole con un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

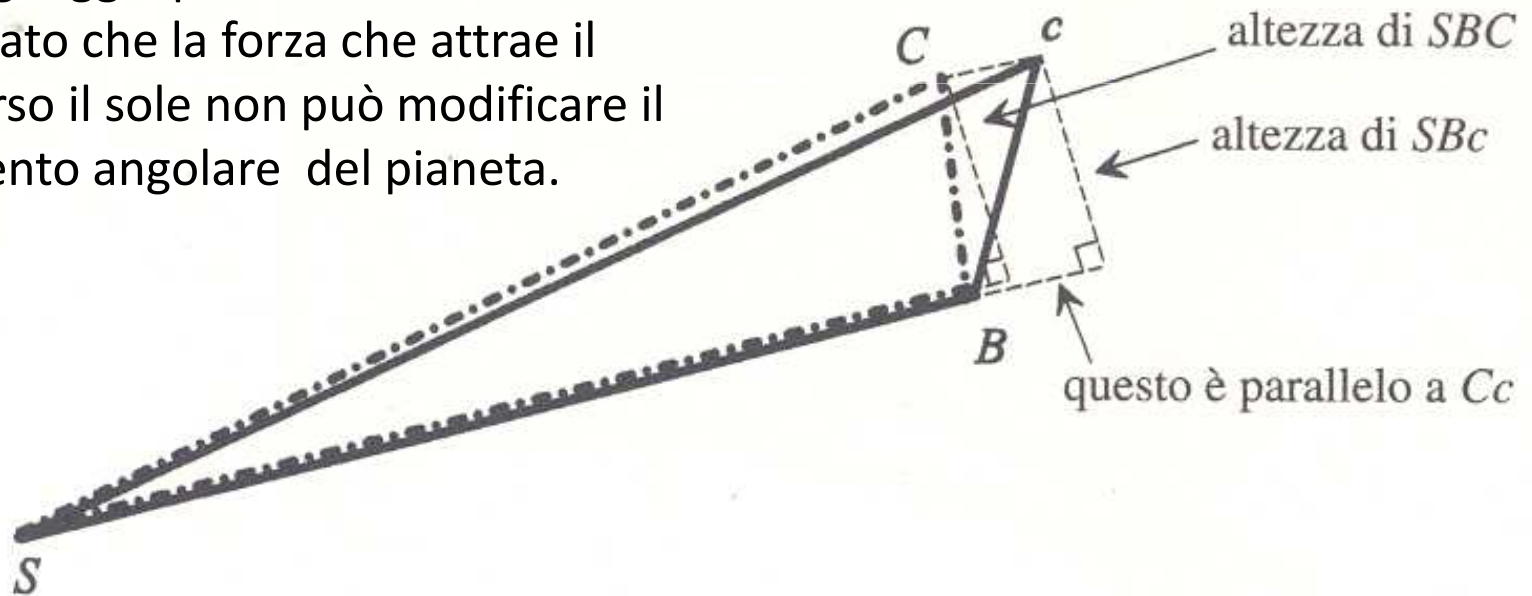


LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Questo è un risultato molto importante per la fisica:
la forza che attrae il pianeta verso il sole cambia la traiettoria, ma non il valore dell'area spazzata.

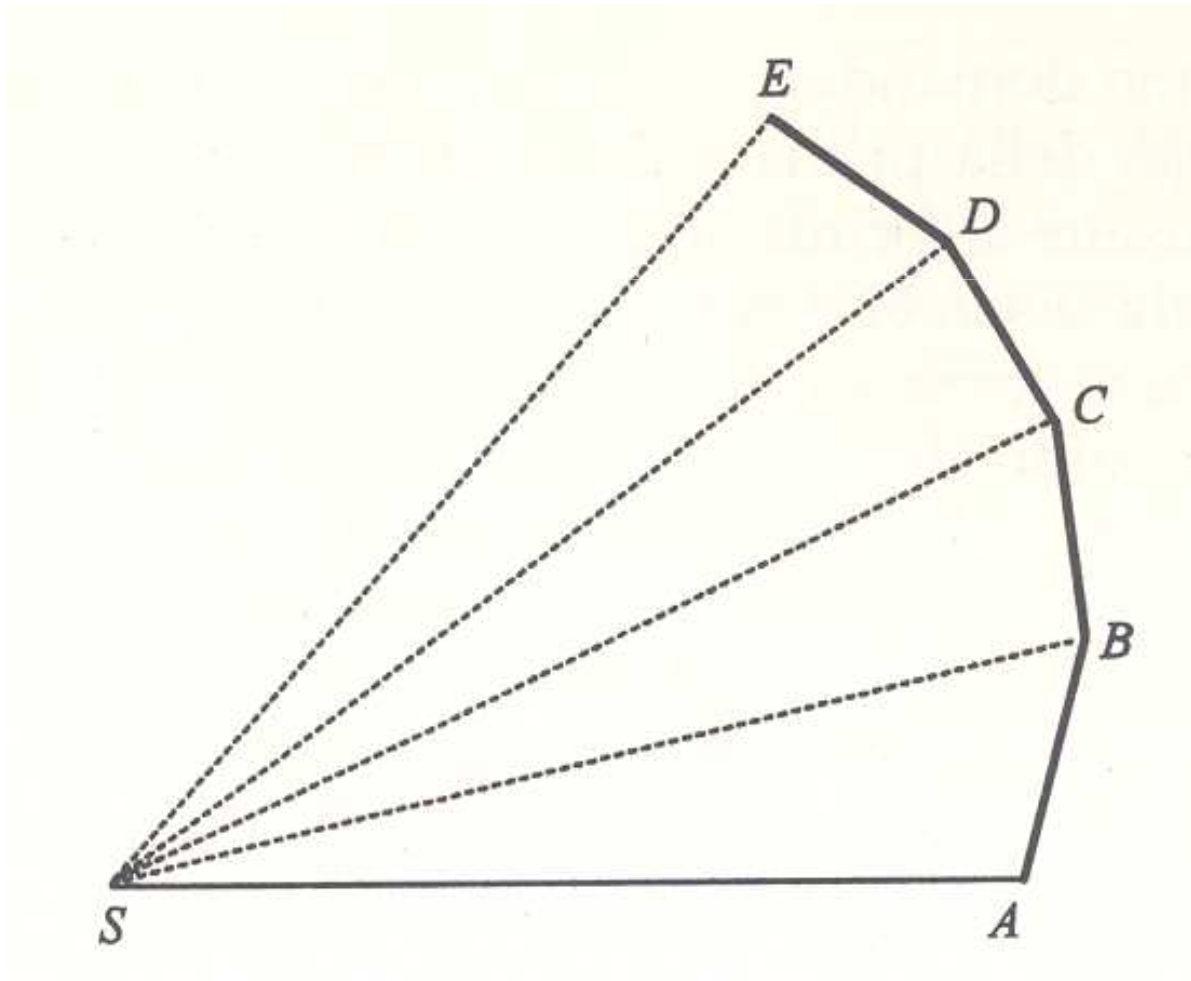
Dopo Newton si è dimostrato che l'area è proporzionale al *momento angolare* del pianeta rispetto al sole.

Con un linguaggio più moderno abbiamo dimostrato che la forza che attrae il pianeta verso il sole non può modificare il momento angolare del pianeta.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

E' ovvio che possiamo applicare lo stesso ragionamento ai successivi triangoli SCD, SDE, e così via. Essi sono i triangoli spazzati dal pianeta in tempi uguali. Siamo quindi riusciti a dimostrare la seconda legge di Keplero.



INTERLUDIO

Sii noti che fin qui si è utilizzato:

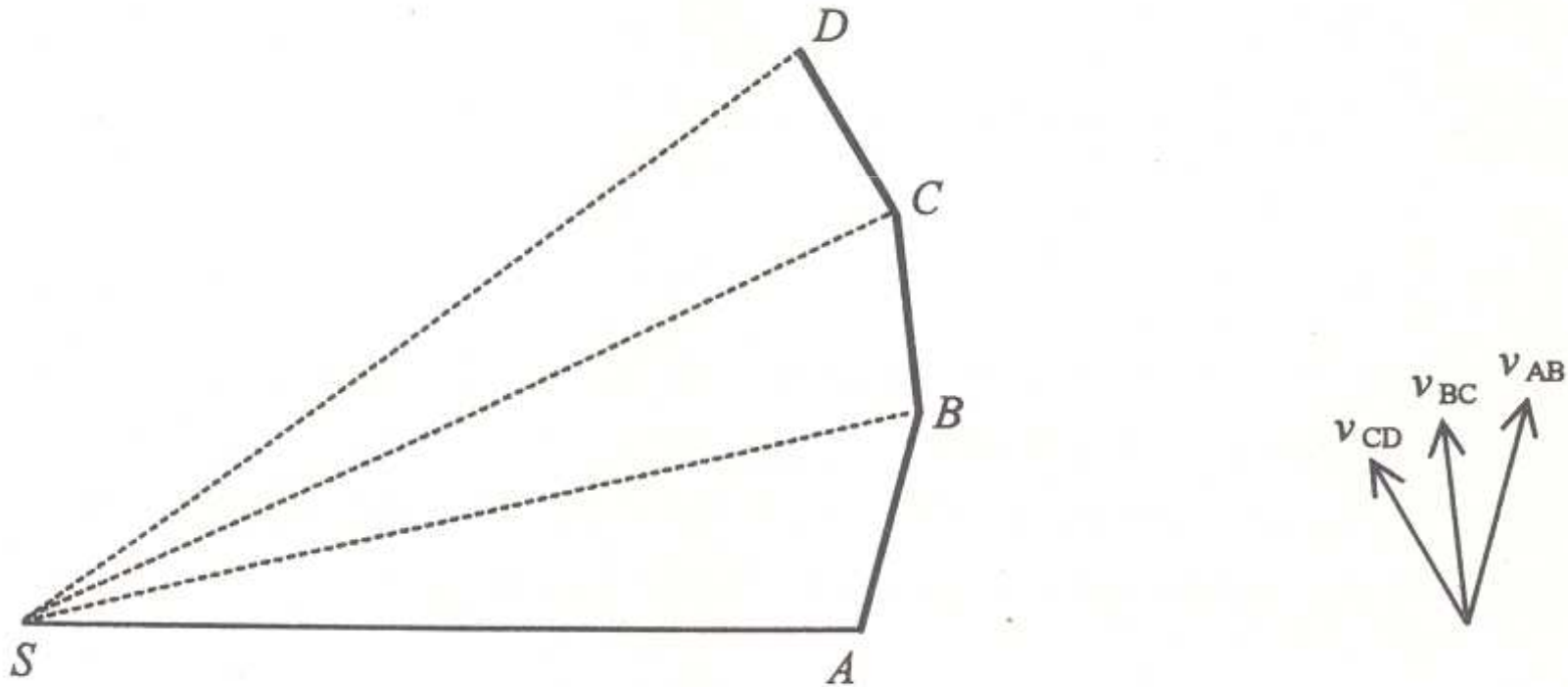
- 1) la prima legge di Newton,
- 2) parte della seconda legge di Newton (ogni cambiamento del moto avviene nella direzione della forza impressa),
- 3) l'idea che la forza di gravità sul pianeta è diretta verso il sole

Si noti che non è stato utilizzato il fatto che la forza di gravità è direttamente proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

In effetti nella sua lezione Feynman dimostra che dalla terza legge di Keplero si deduce che la forza di gravità va come l'inverso del quadrato della distanza.

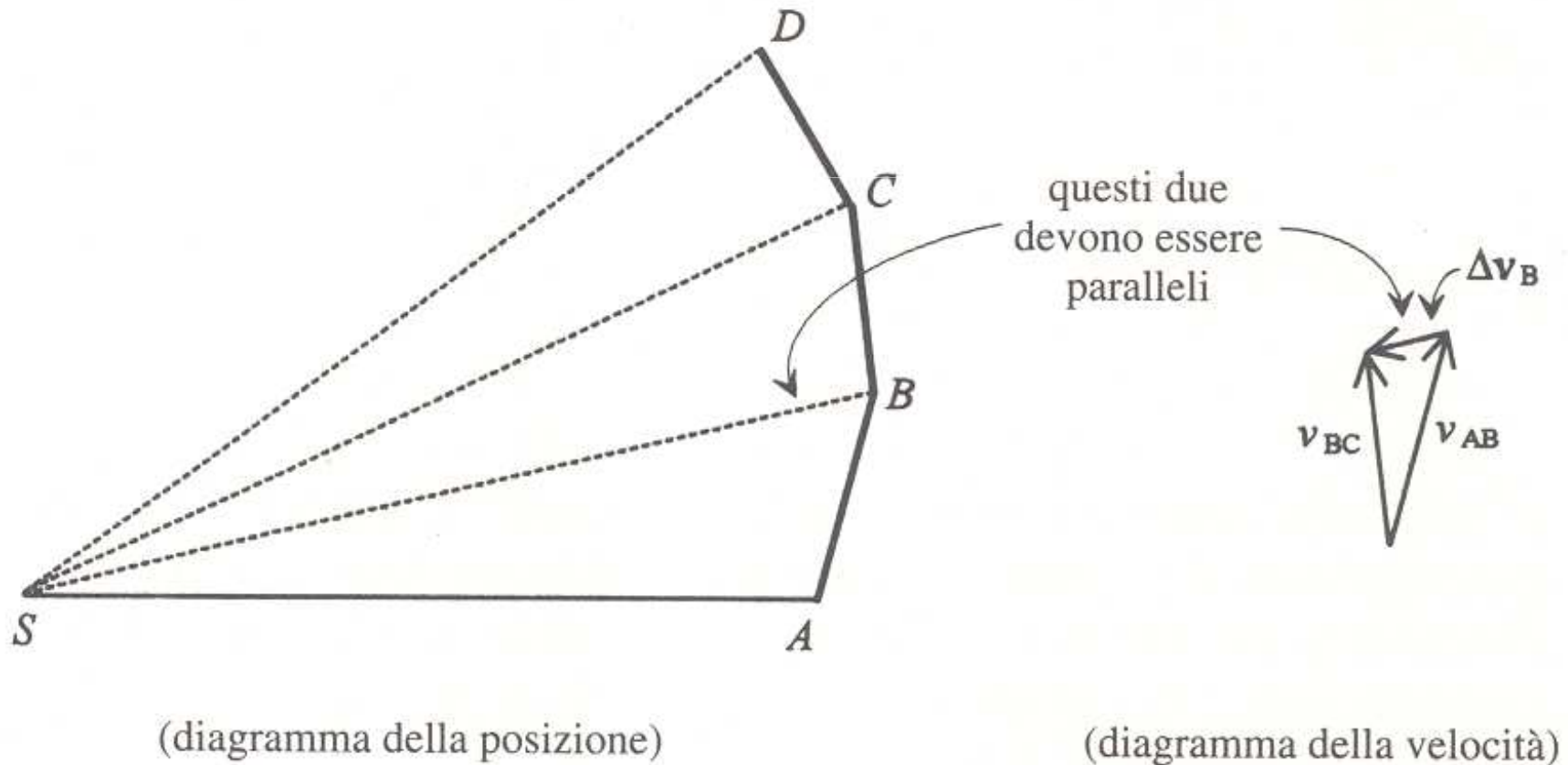
LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

In uguali intervalli di tempo, il pianeta si sposta da A a B, da B a C, e così via. Poiché il pianeta si sposta con velocità costante lungo i tratti AB, BC, ecc., allora possiamo rappresentare anche la velocità con frecce che hanno la stessa direzione degli spostamenti e lunghezze proporzionali ad essi.



LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

La variazione di velocità deve essere diretta verso il sole (dalla seconda legge di Newton) e quindi nella figura Δv_B è diretta nella stessa direzione di BS.

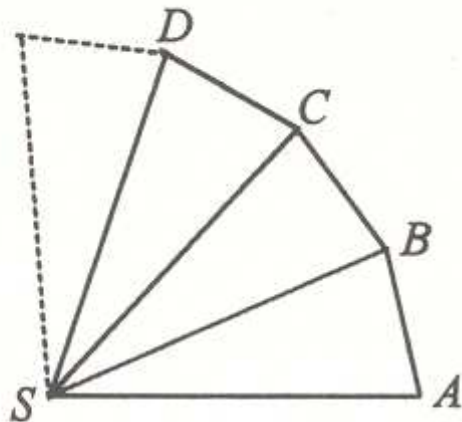


LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Il più semplice degli esempi è quello in cui l'orbita è una circonferenza di raggio R .

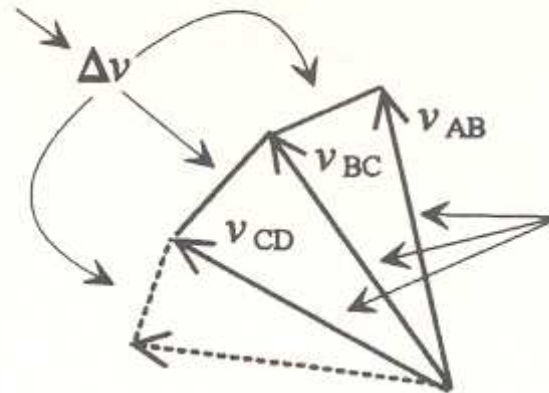
La costruzione dell'orbita con il metodo utilizzato da Newton porta a dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza il cui raggio R è la distanza dal sole.

Anche le velocità sono tutte uguali così che le variazioni di velocità sono tutte identiche e il diagramma delle velocità corrisponde anch'esso ad un poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio v .



(diagramma dell'orbita)

questi sono
tutti uguali



questi sono
tutti uguali

(diagramma delle velocità)

LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Il valore della velocità è dato dalla distanza percorsa dal pianeta su tutta l'orbita diviso per il tempo che impiega a percorrere l'orbita, ossia il periodo T .

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Ogni volta che il pianeta completa un'orbita, il diagramma delle velocità percorre anch'esso una circonferenza completa.

Quando la freccia della velocità completa un giro, la punta ha percorso una distanza $2\pi v$. La variazione della velocità in un intervallo di tempo Δt sarà data da:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

LA NATURA DELLA FORZA DI GRAVITA'

Poiché la forza è proporzionale alla variazione della velocità sull'intervallo di tempo, abbiamo:

$$F \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2\pi}{T} R \right) = (2\pi)^2 \frac{R}{T^2}$$

Ma per la seconda legge di Keplero

$$T^2 \sim R^3$$

Quindi:

$$F \sim 1/R^2$$

INTERLUDIO

Sia Keplero sia Newton ci hanno dato tre leggi.

Le leggi di Keplero sono generalizzazioni dai risultati delle osservazioni celesti di Tycho Brahe.

Le leggi di Newton sono delle affermazioni di principio sulle relazioni tra materia, forze e moto. Se il comportamento dedotto da queste affermazioni corrisponde a quanto si osserva in natura, allora le assunzioni sono probabilmente corrette e, come dice Einstein, possiamo dire di aver conosciuto “**i pensieri di Dio**”.

In campo planetario la verifica della correttezza delle affermazioni di Newton è data dal fatto che da esse dobbiamo dedurre le leggi di Keplero.

Per stabilire quale tipo di moto planetario prevedono le sue leggi, Newton dovette prima individuare la natura della forza di gravità (e per fare ciò si servì della seconda e della terza legge di Keplero), poi, servendosi della gravità, dimostrare che le orbite dei pianeti sono delle ellissi.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

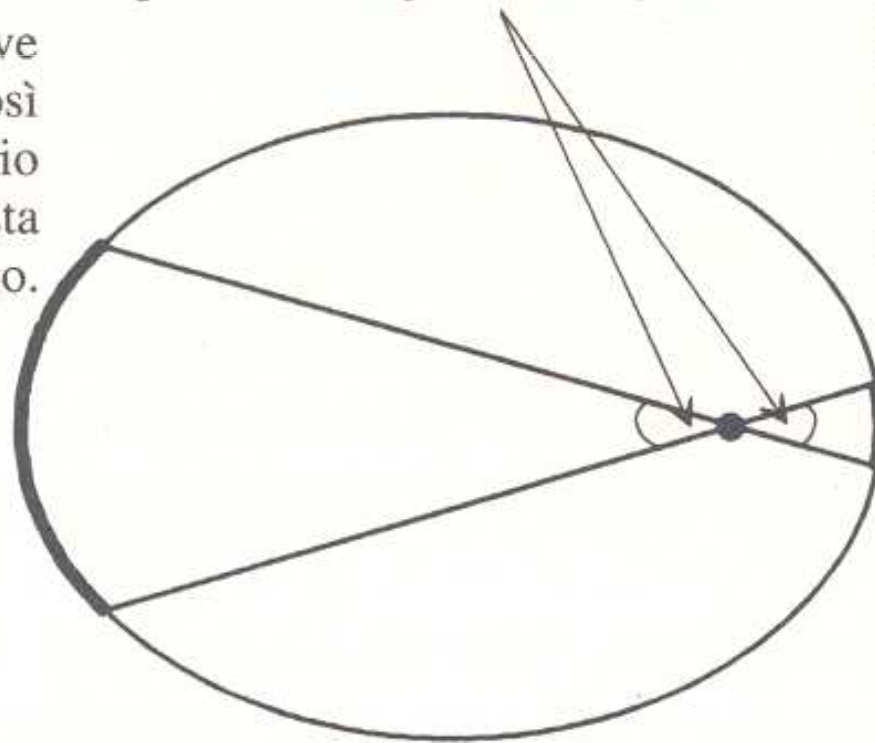
Per dimostrare la legge delle ellissi Feynman divide l'orbita in angoli uguali invece che in aree uguali.

La prima conclusione a cui arriva è che: $\Delta t \sim (\text{area spazzata}) \sim R^2$.

R è la distanza dal sole.

Qui il pianeta si muove più lentamente, così il tempo necessario a percorrere questa parte è più lungo.

questi due angoli sono uguali



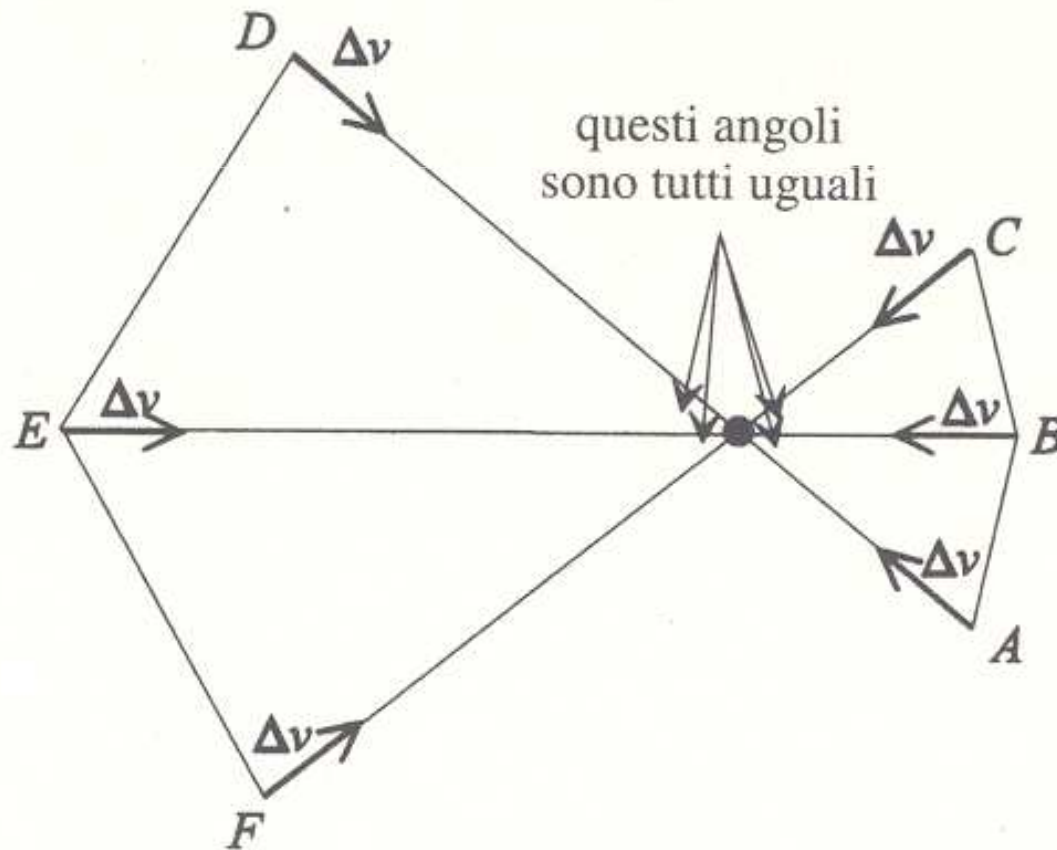
Poiché il pianeta si muove più lentamente quando è vicino al Sole, il tempo impiegato a percorrere questo segmento dell'orbita è breve.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

In ogni punto posto sull'orbita (A, B, C, D, E, F e tutti i punti compresi tra questi) c'è una variazione Δv verso il sole.

Maggiore è la forza, maggiore è Δv ; inoltre più è lungo l'intervallo di tempo Δt , maggiore è la variazione di velocità

$$\Delta v \sim F \cdot \Delta t$$



Essendo $F \sim 1/R^2$ e $\Delta t \sim R^2$,

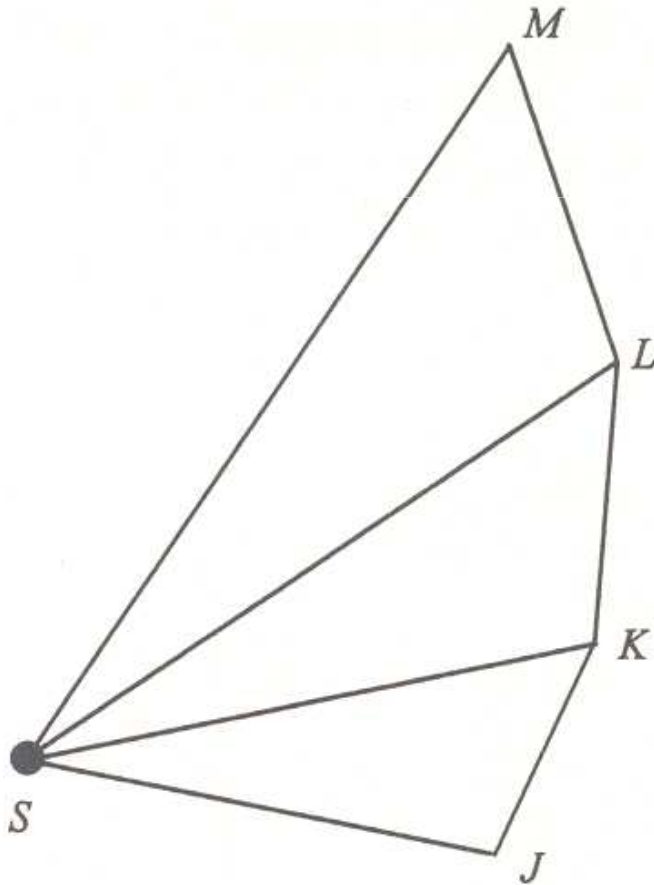
$$\Delta v \sim (1/R^2) \cdot R^2 = 1.$$

La variazione di velocità non dipende dalla distanza, ma è costante!!!

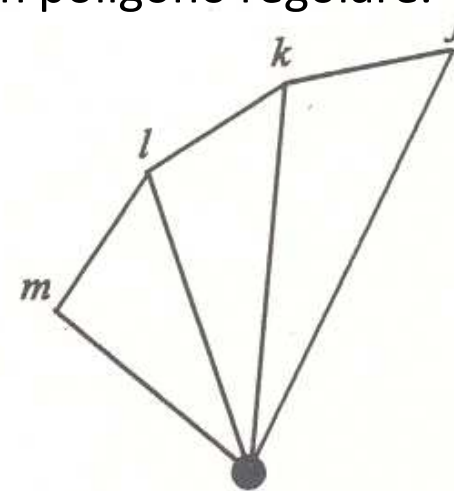
“Si verificano uguali variazioni di velocità quando l'orbita descrive angoli uguali.”

LA LEGGE DELLE ELLISSI

L'uso di angoli uguali fa sì che i segmenti sull'orbita siano diversi (JK, KL, LM) e quindi anche le velocità (i segmenti che nel grafico di sinistra hanno per estremi j, k, l, m), ma le variazioni di velocità sono uguali ($jk = kl = lm$). Inoltre i segmenti jk e KS , kl e LS , lm e MS sono paralleli in quanto la variazione di velocità è sempre diretta verso il sole (S).

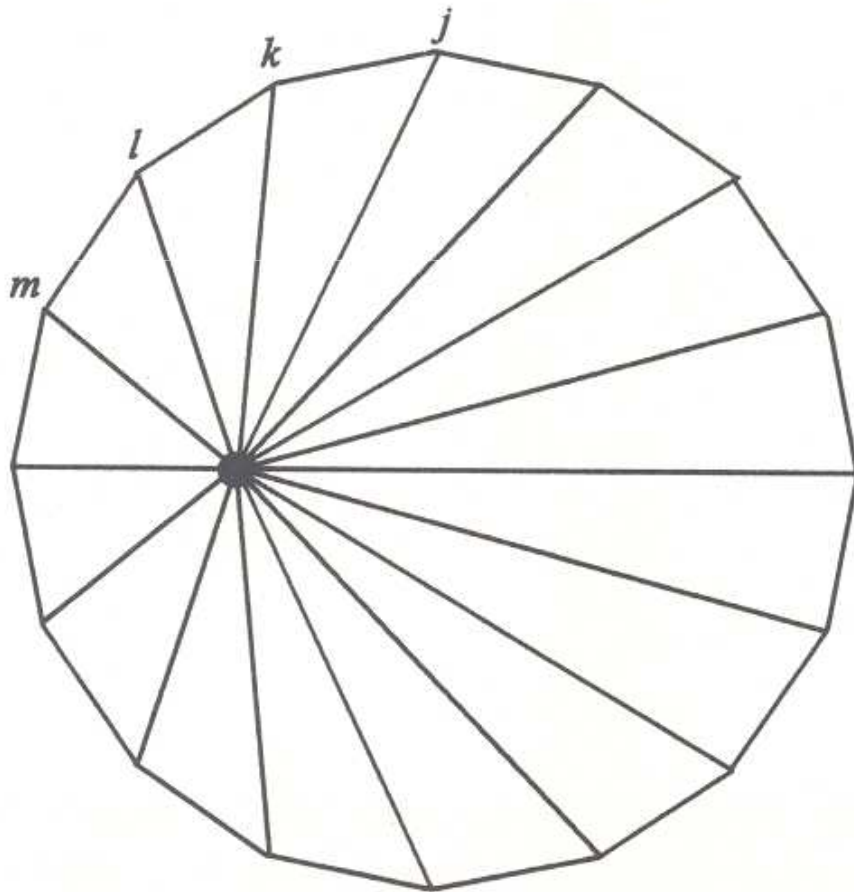


Poiché le linee KS, LS, MS , ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Poiché le linee KS, LS, MS, ecc. sono costituite in modo da formare angoli uguali, i lati della figura costruita dal diagramma delle velocità, quando questo è dato da un'orbita completa, è un poligono regolare, anche se l'origine delle velocità non si trova al centro.

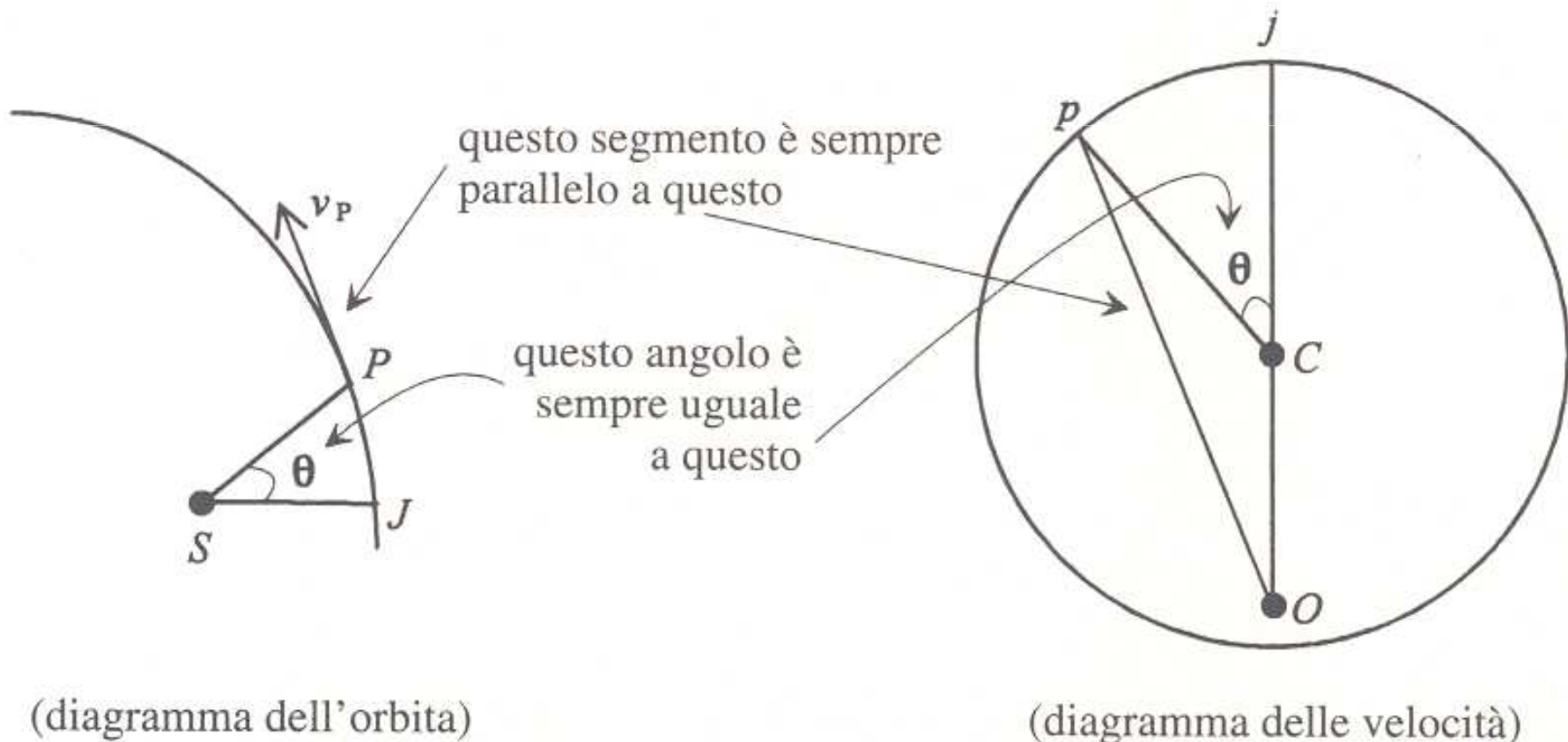


Se procediamo ora dividendo il diagramma dell'orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, che formino angoli fra loro uguali, ma sempre più piccoli, l'orbita viene a corrispondere sempre meglio a una curva liscia, e il diagramma delle velocità è un poligono regolare che si avvicina sempre più ad una circonferenza.

L'origine non è necessariamente al centro.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

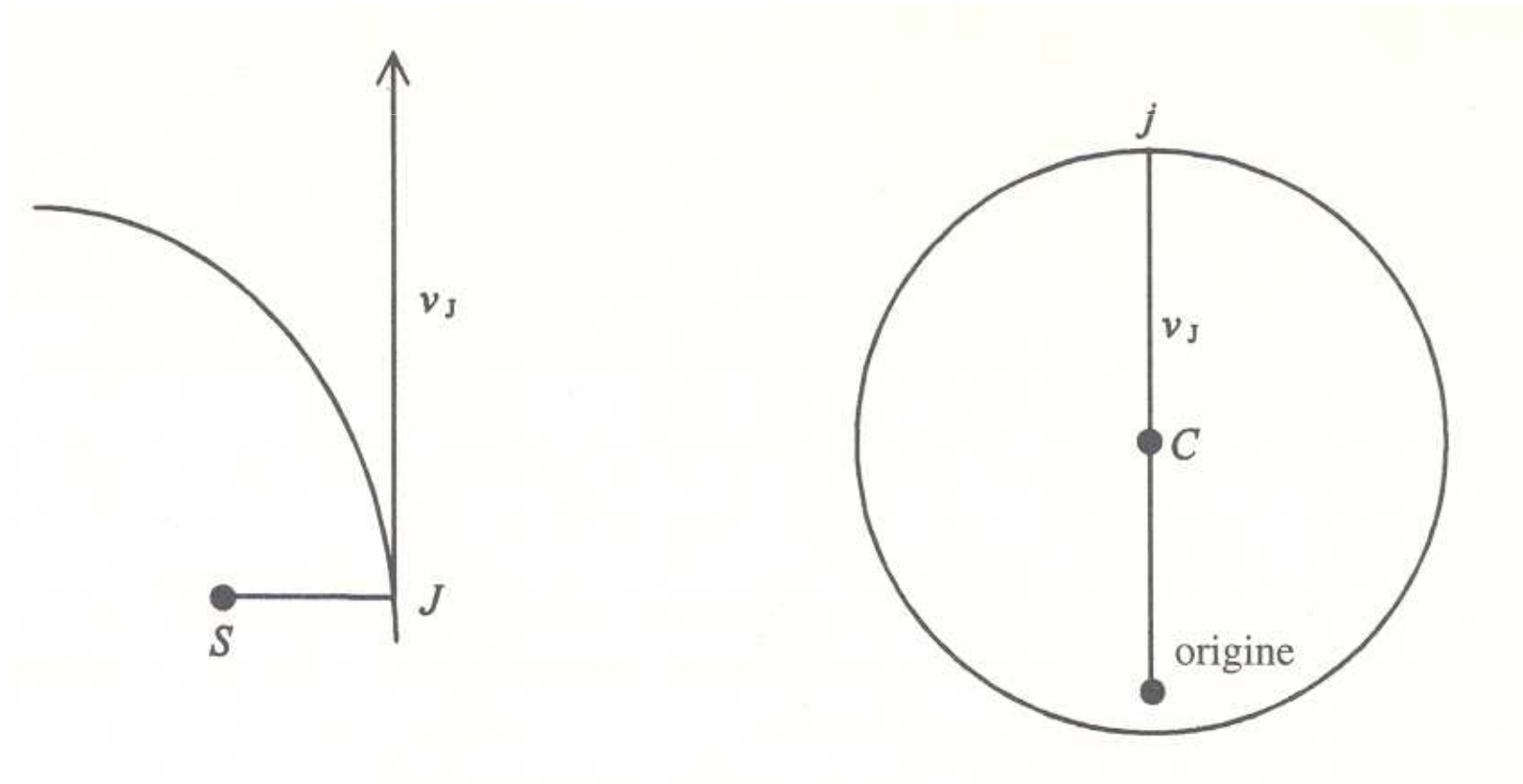
A questo punto Feynman costruisce un diagramma dell'orbita con la prima posizione (J) che forma una linea orizzontale con il sole (S) e quindi nel corrispondente diagramma delle velocità il segmento Oj rappresenta la velocità in J, mentre Op quella in P. Egli fa notare che l'angolo jCp del diagramma delle velocità è uguale all'angolo JSP del diagramma delle orbite.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Possiamo ricostruire la forma dell'orbita sapendo che ogni orbita permessa dalle leggi di Newton e dalla forza di gravità deve avere per diagramma delle velocità una circonferenza.

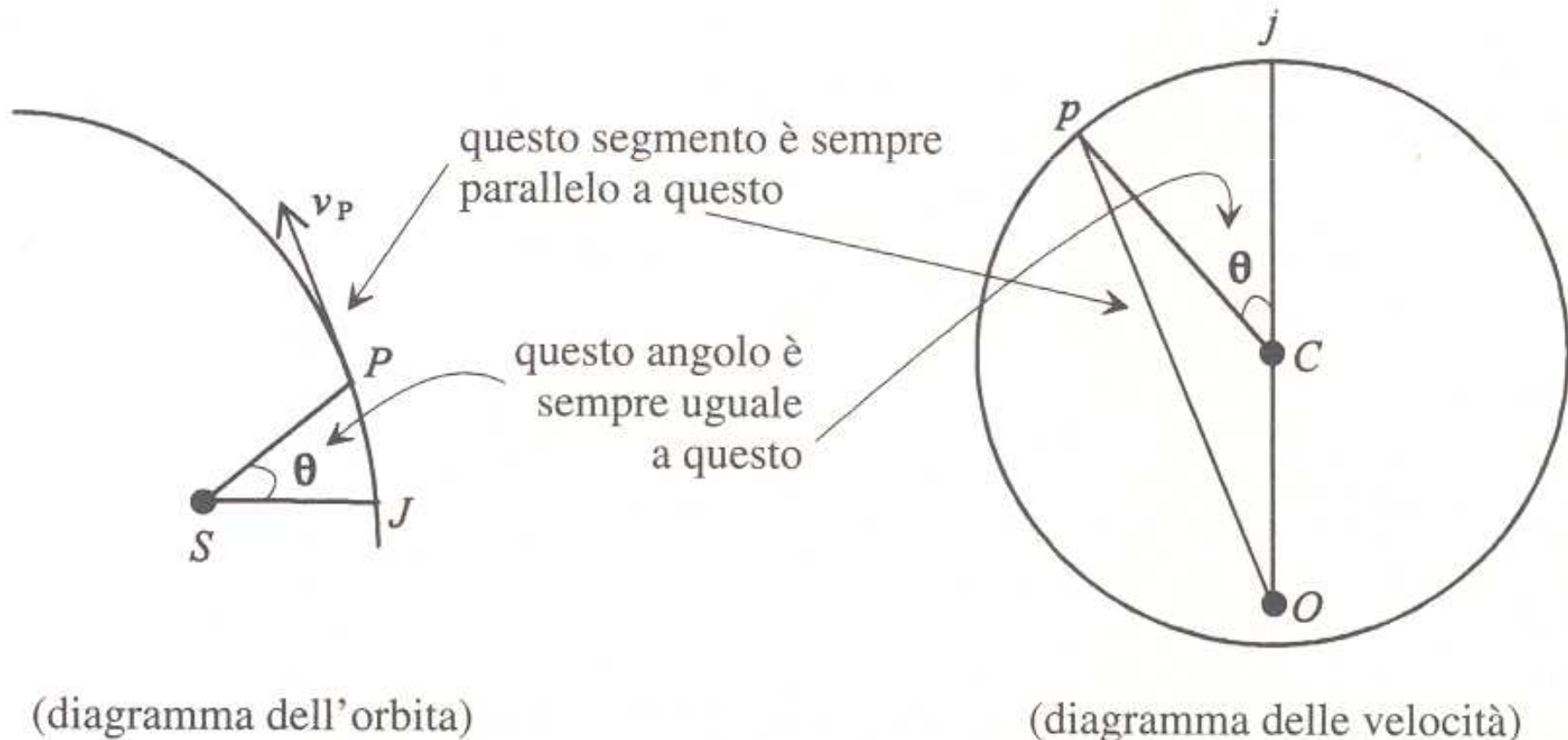
Scegliamo quindi un punto qualsiasi all'interno della circonferenza diverso dal centro C . Questo punto sarà l'origine delle velocità. Il segmento Oj è proporzionale e parallelo alla velocità v_j nel punto J del diagramma dell'orbita.



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Tracciamo un segmento dall'origine ad un punto p qualsiasi della circonferenza, ad esso corrisponde un punto P sull'orbita, per il quale si ha:

- la linea dall'origine al punto p del diagramma delle velocità è parallela alla tangente al diagramma dell'orbita nel punto P ;
- l'angolo jCp è uguale all'angolo JSP .

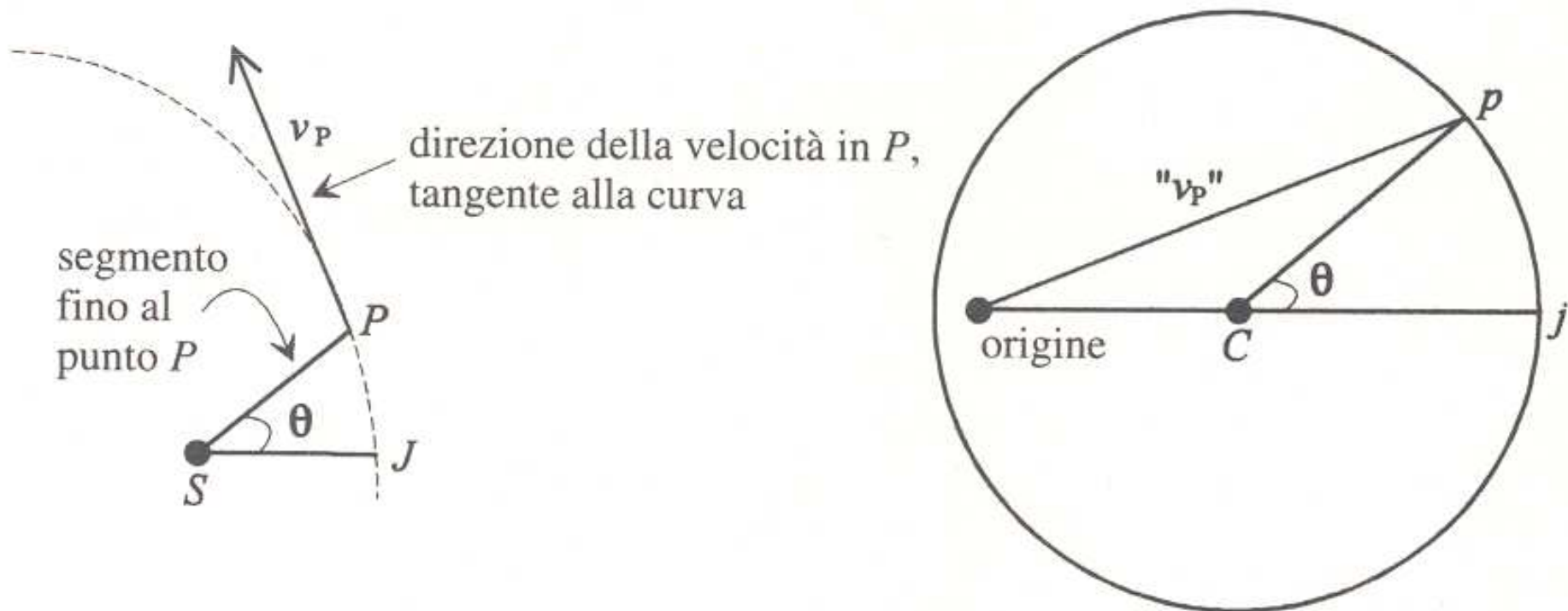


LA LEGGE DELLE ELLISSI

Feynman fa ruotare il diagramma delle velocità di 90° in senso orario in modo che i lati dell'angolo θ risultino paralleli tra un diagramma e l'altro.

La linea indicata con « v_p », che era parallela alla velocità, ora è perpendicolare.

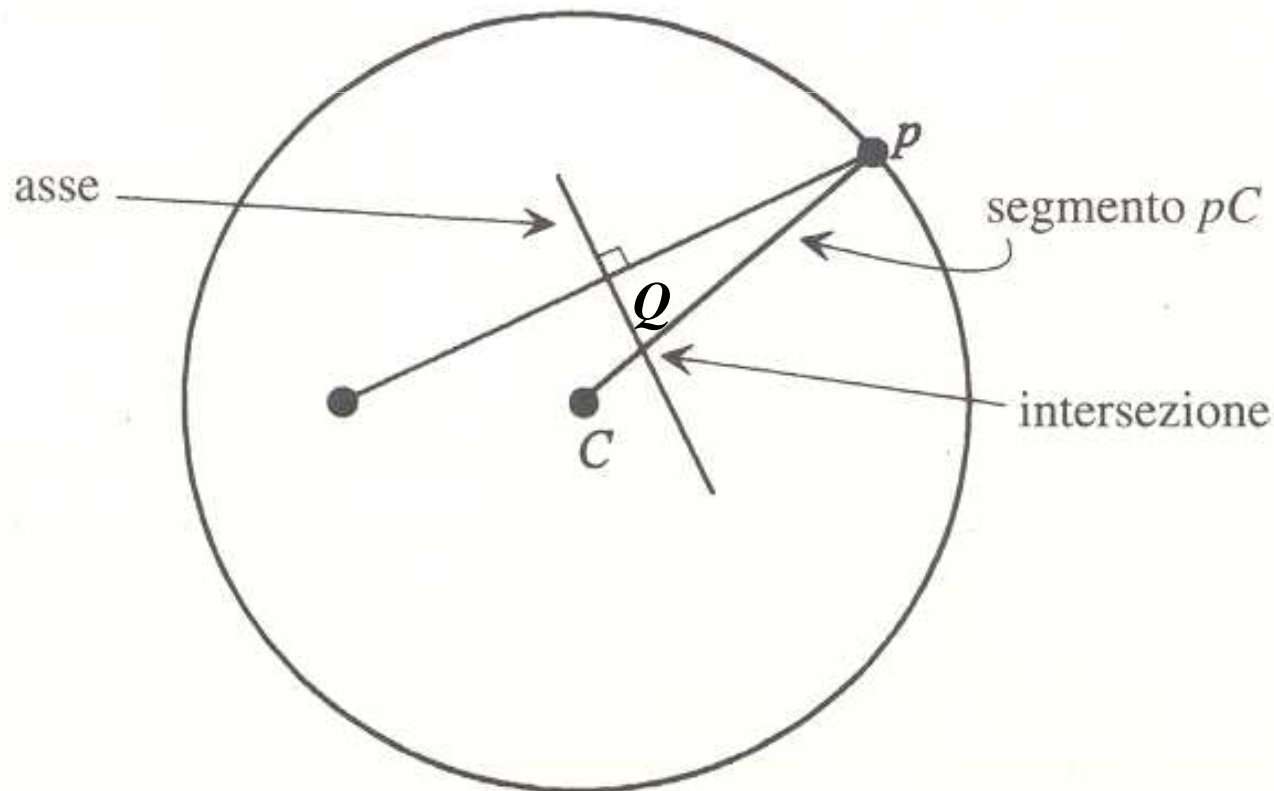
Dal diagramma delle velocità sappiamo la direzione del segmento che congiunge il sole al punto P e la direzione della tangente (la perpendicolare a v_p), ma non possiamo sapere con esattezza la posizione del punto P .



LA LEGGE DELLE ELLISSI

Si potrà tracciare la curva che gode di queste proprietà sulla diagramma delle velocità in modo tale che le dimensioni dell'orbita siano del tutto arbitrarie, ma tutte le direzioni, e di conseguenza la forma, saranno giuste.

Per ottenere l'orbita costruiamo l'asse del segmento dall'origine a p (che è parallelo alla velocità in P), quindi tracciamo il segmento congiungente il centro C con p e un punto dell'orbita.



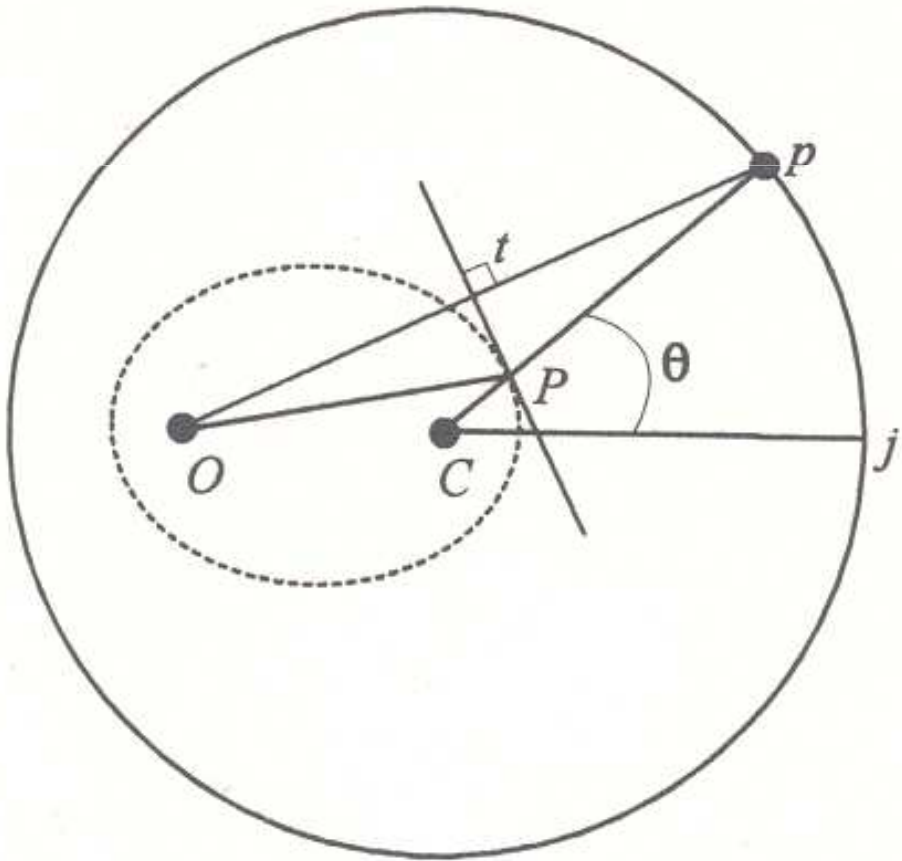
Il punto Q di intersezione tra queste due linee appartiene all'orbita.

Quando il punto p si muove sulla circonferenza, Q descrive l'orbita del pianeta.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

Si dimostra facilmente che il segmento Cp è uguale alla somma dei segmenti CP e OP , ma essendo tale segmento il raggio di una circonferenza si ha che qualunque sia p , e di conseguenza P :

$$OP + CP = Cp = \text{costante.}$$



L'insieme dei punti P del piano che hanno costante la somma delle distanze da due punti fissi è l'ellisse.

I due punti fissi (nel nostro caso O e C) sono i **fuochi** dell'ellisse.

LA LEGGE DELLE ELLISSI

La forma dell'orbita dipende dalla posizione del punto O origine delle velocità.

Se O coincide con C, il centro del diagramma, i due fuochi dell'ellisse coincidono e il pianeta ha la stessa velocità in ogni punto dell'orbita che risulta essere una **circonferenza**.

Più O e C sono vicini, più l'ellisse è vicina ad una circonferenza.

Più O e C sono lontani, più l'ellisse è allungata.

Se O è esterno alla circonferenza, l'orbita è un'**iperbole**.

Se O è sulla circonferenza l'orbita è una **parabola**.