

Oscillazioni del pendolo e determinazione dell'accelerazione di gravità

Scopo dell'esperimento

Lo scopo di questo esperimento è quello di studiare quantitativamente le piccole oscillazioni di un pendolo e determinare l'accelerazione di gravità g che verrà determinata mediante un fit di dati sperimentali (lunghezza e periodo di un'oscillazione) acquisiti mediante il collegamento di un sensore a interruzione di fascio (IR breakbeam) che opera nell'infrarosso con la scheda Arduino collegata ad un computer.

Teoria del pendolo

Il *pendolo semplice* è costituito da una massa puntiforme m sospesa ad un filo ideale, ovvero inestensibile e di massa trascurabile, fissato all'altro estremo ad un vincolo privo di attrito. Il punto materiale è quindi vincolato a muoversi lungo un arco di circonferenza posta sul piano verticale, il cui centro è il punto di sospensione O e il raggio la lunghezza ℓ del filo.

L'equazione del moto di un pendolo semplice, trascurando gli attriti, si ricava dalla 2^a legge di Newton considerando il punto materiale, di massa m , soggetto alla forza peso e alla tensione del filo. Con riferimento alla figura 1 e ovvio significato dei simboli:

$$-mg \sin \theta = ma_T,$$

ricordando che l'accelerazione tangenziale a_T può essere espressa mediante l'accelerazione angolare α utilizzando la relazione $a_T = m\alpha$, si ha: $\ell\alpha = -g \sin \theta$, da cui

$$[1] \quad \alpha = -\left(\frac{g}{\ell}\right) \sin \theta$$

Se l'angolo di oscillazione è "piccolo" essa può essere semplificata utilizzando l'approssimazione $\sin \theta \approx \theta$ (nella tabella 1 sono riportati i valori dell'angolo iniziale e l'errore percentuale che si commette nell'approssimazione delle piccole oscillazioni). L'equazione [1] diventa:

$$[2] \quad \alpha = -\left(\frac{g}{\ell}\right) \theta = -\omega_0^2 \theta$$

dove si è definita la *pulsazione* $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

La cui soluzione generale dell'equazione [2] si può scrivere nella forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

dove θ_0 rappresenta l'ampiezza (l'angolo massimo raggiunto nelle oscillazioni) e ϕ la fase iniziale.

Se la massa viene spostata dalla posizione di equilibrio e lasciata andare, $\phi = 0$.

Nel limite di piccole oscillazioni il pendolo ha periodo

$$[3] \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Una delle proprietà più importanti delle piccole oscillazioni è che il periodo non dipende dall'ampiezza.

Per grandi valori di θ_0 la soluzione può essere calcolata numericamente e si trova che il periodo dipende dall'ampiezza delle oscillazioni θ_0 e si può scrivere nella forma $T = T_0 \cdot f(\theta_0)$, essendo T_0 il periodo nel limite di piccole oscillazioni e $f(\theta_0)$ una funzione che dipende solo dall'ampiezza e non dalle altre proprietà del pendolo.

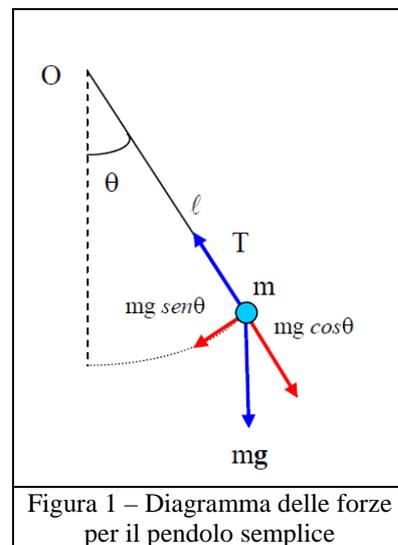


Figura 1 – Diagramma delle forze per il pendolo semplice

Per determinare l'accelerazione di gravità si osservi che la [3] può essere scritta nella forma:

$$[4] \quad \ell = \frac{g}{4\pi^2} T_0^2$$

e questa espressione suggerisce un metodo da utilizzare per la sua determinazione. Si acquisisce una serie di valori del periodo di oscillazione al variare della sua lunghezza, si riporta in un grafico cartesiano, in ascissa i valori di T_0^2 e in ordinata i valori di ℓ , i punti sperimentali si devono disporre lungo una retta che passa per l'origine il cui coefficiente angolare è $k = \frac{g}{4\pi^2}$. Ricavando quindi k mediante un fit lineare (si farà uso di excel per fare i calcoli) l'accelerazione di gravità si ottiene da

$$[5] \quad g = 4\pi^2 k .$$

Tabella 1

θ_0 [°]	θ_0 [rad]	$\sin \theta_0$	$ \theta_0 - \sin \theta_0 $	$\varepsilon\% = \frac{ \theta_0 - \sin \theta_0 }{\sin \theta_0}$
1	0,017453293	0,017452406	8,86083E-07	0,005%
2	0,034906585	0,034899497	7,08834E-06	0,020%
3	0,052359878	0,052335956	2,39213E-05	0,046%
4	0,06981317	0,069756474	5,66963E-05	0,081%
5	0,087266463	0,087155743	0,00011072	0,127%
6	0,104719755	0,104528463	0,000191292	0,183%
7	0,122173048	0,121869343	0,000303704	0,249%
8	0,13962634	0,139173101	0,000453239	0,326%
9	0,157079633	0,156434465	0,000645168	0,412%
10	0,174532925	0,173648178	0,000884748	0,510%
11	0,191986218	0,190808995	0,001177222	0,617%
12	0,20943951	0,207911691	0,001527819	0,735%
13	0,226892803	0,224951054	0,001941748	0,863%
14	0,244346095	0,241921896	0,0024242	1,002%
15	0,261799388	0,258819045	0,002980343	1,152%
16	0,27925268	0,275637356	0,003615325	1,312%
17	0,296705973	0,292371705	0,004334268	1,482%
18	0,314159265	0,309016994	0,005142271	1,664%
19	0,331612558	0,325568154	0,006044403	1,857%
20	0,34906585	0,342020143	0,007045707	2,060%

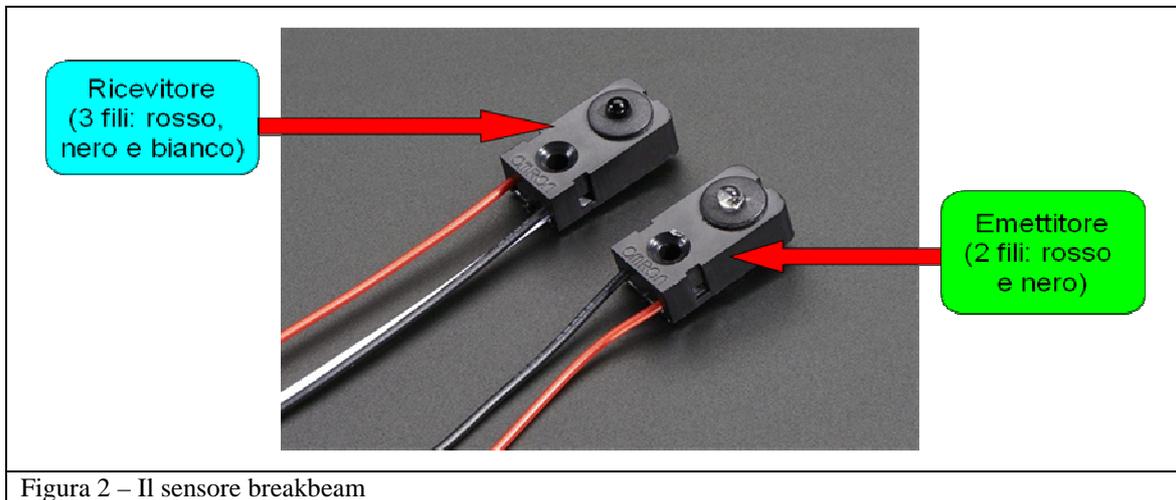
L'acquisizione dei dati verrà effettuata acquisiti mediante un sensore a interruzione di fascio (ir breakbeam) che opera nell'infrarosso collegato, tramite la scheda Arduino ad un computer.

Il sensore IR breakbeam.

I sensori a raggi infrarossi IR Breakbeam sono costituiti da due elementi: un emettitore di un fascio IR e un ricevitore sensibile alla stessa radiazione. Quando qualcosa passa tra i due, e non è trasparente all'IR, allora il "fascio si rompe" (breakbeam) e il ricevitore dà un segnale.

L'emettitore ha due fili, uno rosso e uno nero, il ricevitore tre fili uno rosso, uno nero e uno bianco. I due rossi vanno collegati ad un pin di tensione, per esempio quello da 5V, i due neri a terra (un pin GND, il bianco del ricevitore ad un pin digitale. In figura 3 il collegamento del sensore alla scheda Arduino (ATTENZIONE nella figura il filo del ricevitore non è bianco, ma giallo).

Useremo una versione IR da 5mm. Funziona fino a 25 cm di distanza. Si può alimentare da 3,3V a 5V.



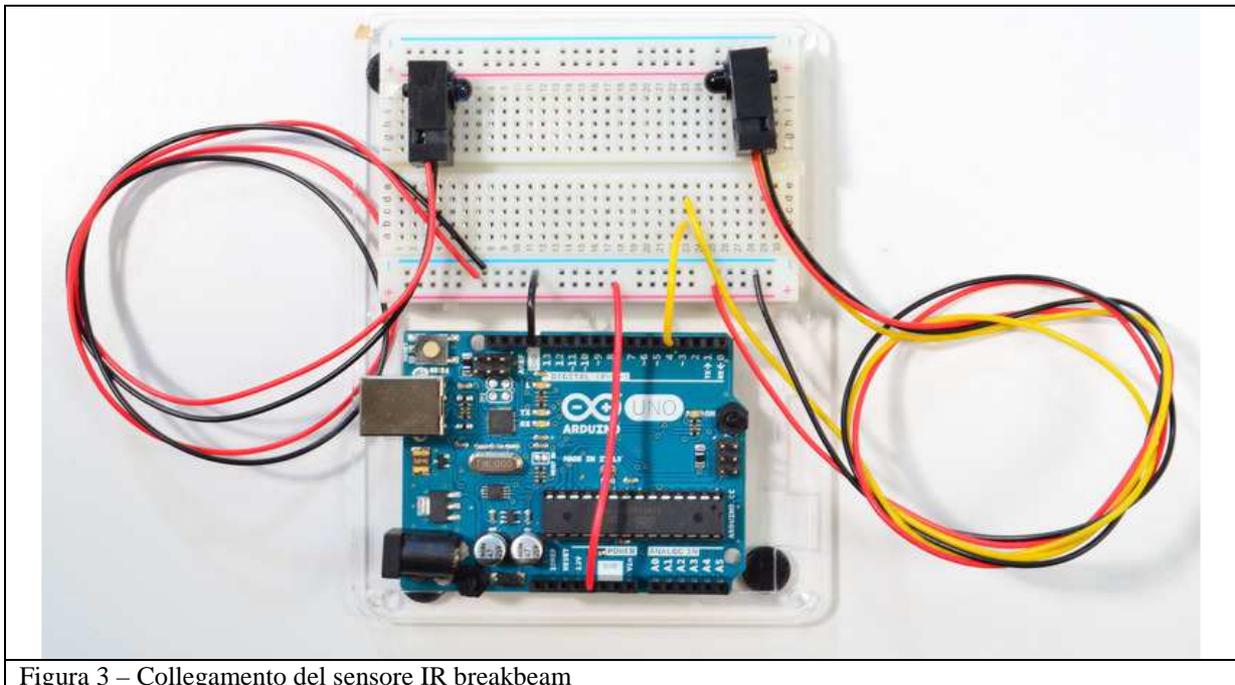
Esecuzione dell'esperimento

La prima cosa che ci serve, nell'esecuzione dell'esperimento, è costruire il sistema di acquisizione dati. Si utilizzerà una scheda **Arduino uno R3** su cui verrà caricato lo *sketch* in grado di leggere la durata di un'oscillazione.

Il circuito va costruito sulla breadboard (basetta con i fori) a disposizione e il suo schema è dato in figura 3. L'emettitore e il ricevitore vanno fissati con il "patafix" al sostegno ad U che avete in dotazione. Il tutto va montato su un supporto e disposto in modo che la sferetta del pendolo, quando è a riposo, stia proprio in mezzo ai due sensori.

La lunghezza del pendolo può essere fatta variare allungando o accorciando il filo che sostiene la sferetta. La misura della lunghezza va fatta con il metro a disposizione e registrata nella scheda allegata.

Una volta montato l'apparato, chiamare l'insegnante per verificarne il montaggio corretto.



Si consiglia di effettuare non meno di 20 misurazioni per ogni lunghezza. I valori del periodo con l'errore, che usciranno sul monitor seriale di Arduino sono in millisecondi e vanno scritti nella tabella allegata.

Lo sketch è strutturato in modo tale che alla fine delle misurazioni Arduino si ferma; l'istruzione `while(true) {}` significa proprio che fintanto che è vero (true) Arduino esegue le istruzioni dentro le parentesi graffe, ossia nulla. Per iniziare una nuova misurazione bisogna resettare Arduino premendo il tasto reset, oppure, in modo brutale staccando e riattaccando il cavo USB che collega Arduino al computer o anche ricaricando lo sketch e facendo ripartire il monitor seriale.

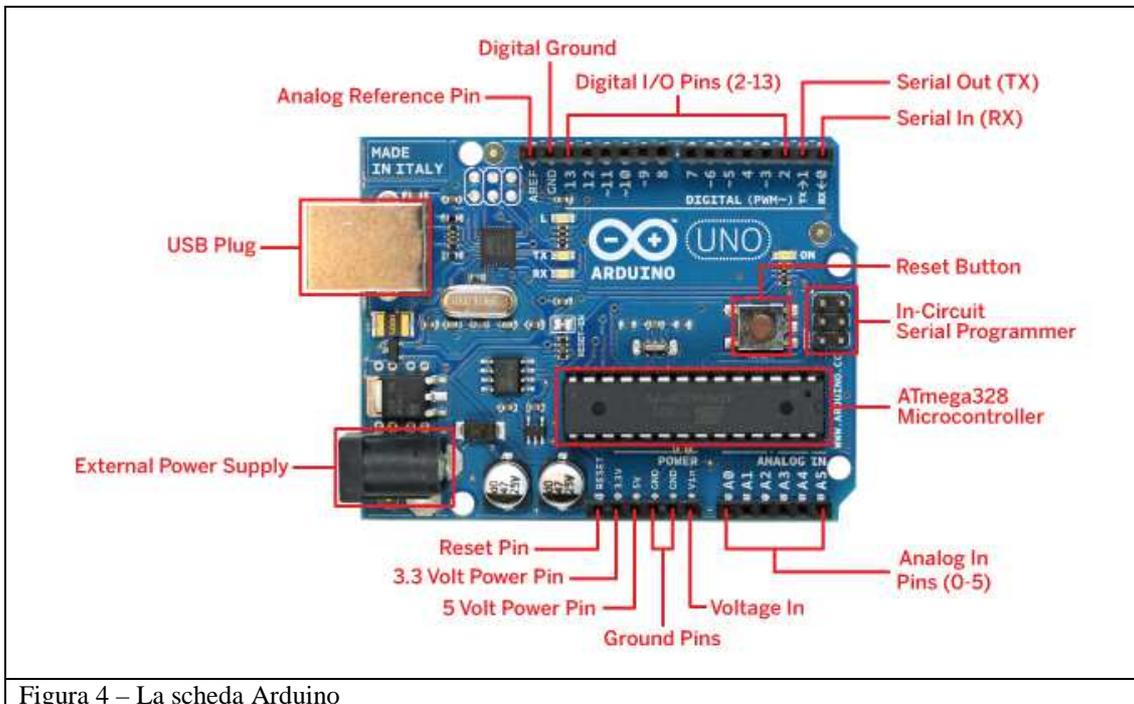


Figura 4 – La scheda Arduino

Sketch per Arduino per la misura della durata delle oscillazioni

//DEFINIAMO LE PORTE UTILIZZATE E DEFINIAMO LE VARIABILI

```
#define SENSOR_PIN 4 // il pin digitale 4 viene chiamato SENSOR_PIN
#define NUM_READS 20 /* Viene definita una variabile chiamata NUM_READS e gli viene attribuito il valore
20. Questa variabile indica il numero di letture per ogni lunghezza del pendolo e può essere fatta variare a
piacere*/
bool last_state = false;
bool wants_period = false;
float last_period = 0.f;
int reads_index = 0;
bool first = true;
```

```
float periods[NUM_READS]; //viene definito l'array periods lungo NUM_READS
```

// VENGONO DEFINITE DUE PROCEDURE

```
void calculateAverage();
void beamUpdate();
```

```
float readPeriod()
{
  float ac_period = millis() - last_period;
  last_period = millis();
  return ac_period;
}
```

//IMPOSTIAMO NEL MODO CORRETTO LE PORTE UTILIZZATE

```
void setup()
{
  pinMode(SENSOR_PIN, INPUT);
  digitalWrite(SENSOR_PIN, HIGH);
  Serial.begin(9600);
}
```

/*DICHIARIAMO LE VARIABILI VETTORIALI UTILIZZATE E SCRIVIAMO IL PROGRAMMA DI ESECUZIONE DELLA MISURA*/

```
void loop()
{
  if(reads_index < NUM_READS)
  {
    beamUpdate();
  }
  else
  {
    calculateAverage();

    // sleep
    while(true) {}
  }
}

void calculateAverage()
{
  float average = 0.f;
  float error = 0.f;
  for(int i = 0; i < NUM_READS; ++i)
  {
    average += periods[i];
  }
  average /= NUM_READS;

  for(i = 0; i < NUM_READS; ++i)
  {
    error = error +(average - periods[i])*(average - periods[i]);
  }
  error = sqrt(error/NUM_READS);
  Serial.print("Media: ");
  Serial.print(average, 3);
  Serial.println(" ms");
  Serial.print("Errore: ");
  Serial.print(error, 3);
  Serial.println(" ms");
}

void beamUpdate()
{
  bool state = digitalRead(SENSOR_PIN);
  if(state != last_state)
  {
    if(!state)
    {
      wants_period = !wants_period;
      if(wants_period)
      {
        float per = readPeriod();

        if(!first)
        {
```

```

periods[reads_index] = per;
++reads_index;

Serial.print(reads_index);
Serial.print(" ");
Serial.println(per, 3);
}
else first = false;
}
}
last_state = state;
}
}
}

```

Installazione dello sketch su Arduino e inizio della misura.

Per caricare gli sketch su Arduino si usa il software *Arduino* che si trova sul *desktop*. Una volta aperto appare la schermata di figura 5 bisogna copiare lo sketch precedente al suo interno e poi salvare il file su una cartella (il comando salva si trova dentro il sottomenu File). Una volta salvato, si può verificare

la corretta scrittura del codice con il pulsante *compila* .

Controllare che il cavetto USB sia collegato.

Se la compilazione è andata a buon fine si può caricare il programma sulla scheda *Arduino* con il pulsante *carica* .



Figura 5 – L'ambiente di programmazione di *Arduino*

- 1) Allineare i sensori con la pallina come descritto sopra.
- 2) Spostare la pallina dalla posizione di equilibrio

ATTENZIONE: non allontanare troppo la pallina dalla verticale, ricordare che gli angoli di partenza devono essere piccoli

3) Lasciare andare la pallina e aspettare un paio di secondi.

4) Avviare acquisizione dati cliccando su *Strumenti* e quindi su *Monitor seriale*. Sul monitor appariranno un numero progressivo (da 1 a 20 ossia NUM_READS) e la durata di una oscillazione, via via che vengono acquisiti (vedi figura 6 i dati si riferiscono alle oscillazioni di un pendolo lungo 72,0).

5) Alla fine delle NUM_READS acquisizioni compaiono le scritte:

Media: nnnn.nnn ms

Errore: 0.nnn ms

Sia i valori della durata delle singole oscillazioni, sia la media e sia l'errore vengono dati con 3 cifre decimali (il 3 che sta nelle istruzioni Serial.Print significa proprio questo, se si vuol cambiare il numero di cifre decimali basta cambiare questo valore).

NOTA: L'errore viene inteso come scarto quadratico medio:

$$\Delta T_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - T_0)^2}{N}} \quad \text{e} \quad T_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$$

6) Riportare il valore sulla scheda.

Modificare la lunghezza del pendolo (si consiglia di variarla di circa 5 cm alla volta) e ripetere le operazioni dal punto 1 al punto 6 per non meno di 10 volte.

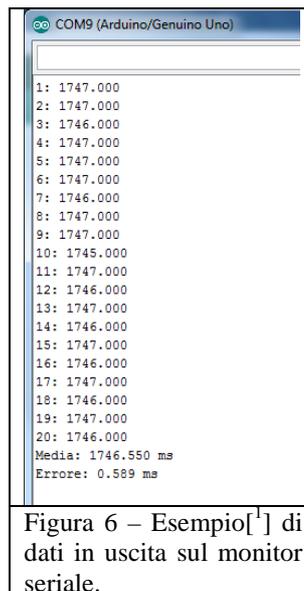
Elaborazione dati

Per l'elaborazione dati:

- 1) Aprite un foglio Excel
- 2) Trascrivere i dati della tabella (con le intestazioni) nelle colonne A, B, C, D.
- 3) Nelle colonne E, F, G, H riportare i valori trasformati nelle unità del SI (ossia metri per le lunghezze e secondi per i tempi).
- 4) Nella colonna I riportare il calcolo di T_0^2 e nella colonna J il suo errore (si calcola con la formula $\Delta T_0^2 = 2 \times T_0 \times \Delta T_0$).
- 5) Realizzare un grafico mettendo sull'asse delle ordinate le lunghezze e sull'asse delle ascisse i valori di T_0^2 . I punti dovrebbero allinearsi lungo una retta che passa per l'origine.
- 6) Fate la regressione lineare dei dati come indicato nel punto 3 della scheda RAPPRESENTAZIONE GRAFICA E ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI CON EXCEL (pag. 8) in modo da ricavare il coefficiente angolare della retta e il suo errore (ossia $k \pm \Delta k$).
- 7) Il valore dell'accelerazione di gravità sarà dato da $(g \pm \Delta g) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 4\pi^2 (k \pm \Delta k) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- 8) Salvare il foglio Excel con il nome: pendolo_GN (N è il numero del gruppo: 1, 2, 3, 4, 5).

Conclusioni

Confrontare il valore dell'accelerazione di gravità misurato con quello teorico $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



[¹] I valori riportati si riferiscono ad una misura della durata delle oscillazioni di un pendolo di lunghezza $\ell = 76.0 \pm 0.3$ cm. Il valore ottenuto per l'accelerazione di gravità è $g = 9.83 \pm 0.03 \text{ m/s}^2$.

