pag. 297 n. 333

Una circonferenza ha il centro nel punto di intersezione delle rette di equazioni $y=-x+5$ e $2x-y-7=0$ e raggio $r=\sqrt{10}$.

Trova l'area del triangolo *ABC*, dove *A* e *B* sono i punti di intersezione della circonferenza con l'asse *x* e *C* è il punto di intersezione delle tangenti condotte da *A* e da *B*.

SOLUZIONE

Per prima cosa troviamo il centro della circonferenza risolvendo il sistema $\begin{cases} y=-x+5 \\ 2x-y-7=0 \end{cases}$.

Ricavando *y* dalla seconda, con il metodo del confronto, si ha che il centro della circonferenza ha coordinate $(4;1)$. Dalla definizione, l'equazione della circonferenza richiesta si ricava da $(x-4)^2+(y-1)^2\left(\sqrt{10}\right)^2$, da cui

[1] $$x^2+y^2-8x-2y+7=0.$$

Intersechiamo con l'asse *x* per trovare le coordinate di *A* e di *B*. $\begin{cases} x^2+y^2-8x-2y+7=0 \\ y=0 \end{cases}$ da cui $A(1;0)$ e $B(7;0)$.

Per determinare il punto *C*, prima determiniamo le tangenti in *A* e *B*, poi le intersechiamo.

Per determinare le tangenti scriviamo la generica retta passante per *A* (poi per *B*) e imponiamo che la sua distanza dal centro della circonferenza sia uguale al raggio.

Retta generica per *A*: $y=m(x-1)$ ossia $mx-y-m=0$.

Distanza retta–centro uguale al raggio: $\frac{|4m-1-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$ ossia $|3m-1|=\sqrt{10(m^2+1)}$. Elevando al quadrato e semplificando si ha: $(m+3)^2=0$, da cui $m=-3$.

La tangente per *A* ha equazione: $3x+y-3=0$.

Retta generica per *B*: $y=m(x-7)$ ossia $mx-y-7m=0$.

Distanza retta–centro uguale al raggio: $\frac{|4m-1-7m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$ ossia $|-3m-1|=\sqrt{10(m^2+1)}$. Elevando al quadrato e semplificando si ha: $(m-3)^2=0$, da cui $m=3$.

La tangente per *B* ha equazione: $3x-y-21=0$.

Intersezione tra le tangenti: $\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ 3x-y-21=0 \end{cases}$. Prima sommando membro a membro e poi sottraendo si ricava $C(4;9)$.

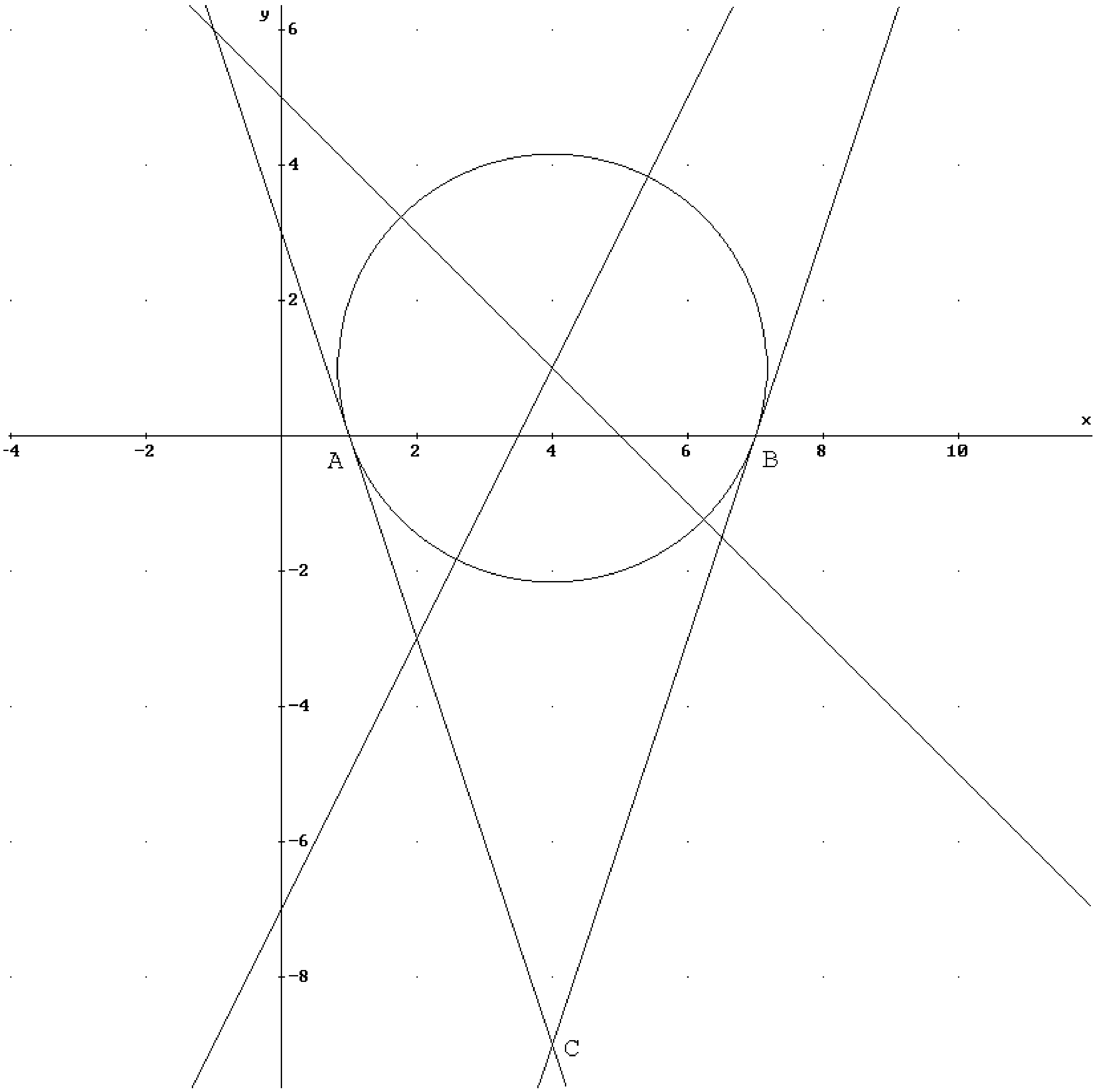
Per trovare l'area possiamo fare il semiprodotto della misura della base *AB* per l'altezza *h* ad essa relativa.

$\overline{AB}=|x_A-x_B|=6$ perché *A* e *B* hanno la stessa ordinata.

$h=|y_C|=9$ perché la base *AB* sta sull'asse *x*.

$A(ABC)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h=27$.

Notiamo che, dalla geometria elementare, il triangolo *ABC* è isoscele sulla base *AB* in quanto, essendo i lati *AC* e *BC* i segmenti di tangenza condotti da *C*, sono uguali.


y
6
4
2
-2
-4
-6
-8
x
-4
-2
2
4
6
8
10
A
B
C