pag. 297 n. 331

Dato il triangolo di vertici $A(1;2)$, $B(-7;6)$ e $C(-1;0)$, determina l'equazione della circonferenza circoscritta e quella della circonferenza con centro *C* e tangente alla retta *AB*.

SOLUZIONE

Per determinare la circonferenza circoscritta possiamo procedere in diversi modi, ne indichiamo due.

Il primo è semplice: se la circonferenza è circoscritta passa per il vertici del triangolo e quindi passa per i punti $A(1;2)$, $B(-7;6)$ e $C(-1;0)$. Se $x^2+y^2+ax+by+c=0$ è l'equazione di una generica circonferenza, imporre il passaggio per i tre vertici conduce al sistema:

$$\begin{cases}1+4+a+2b+c=0\\49+36-7a+6b+c=0\\1-a+c=0\end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases}a+2b+c=-5\\-7a+6b+c=-85\\-a+c=-1\end{cases}$$

Per risolvere il sistema ricaviamo *c* dalla terza equazione e lo sostituiamo nella prima e nella seconda. Dopo le opportune semplificazioni otteniamo:

$$\begin{cases}a+b=-2\\a-b=14\\c=a-1\end{cases} \quad \text{da cui segue} \quad \begin{cases}a=6\\b=-8\\c=5\end{cases}.$$

La circonferenza ha equazione $x^2+y^2+6x-8y+5=0$, centro $Q_1(-3;4)$ e raggio $r_1=2\sqrt{5}$.

Il secondo metodo consiste nel ricordare che il centro della circonferenza circoscritta è il circocentro, ossia il punto di incontro degli assi dei lati del triangolo. È quindi sufficiente determinare le equazioni degli assi di due dei tre lati del triangolo e poi fare la loro intersezione.

Consideriamo il lato *AB*. L'equazione del suo asse si ricava imponendo che un punto generico $P(x;y)$ sia equidistante da *A* e da *B*, ossia: $\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2}=\sqrt{(x_B-x_P)^2+(y_B-y_P)^2}$. Si ha:

$\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(-7-x)^2+(6-y)^2}$ da cui, elevando al quadrato e sviluppando il quadrati:

$1-2x+\cancel{x^2}+4-4y+\cancel{y^2}=49+14x+\cancel{x^2}+36-12y+\cancel{y^2}$ e infine

$2x-y+10=0$.

Consideriamo il lato *AC*. L'equazione del suo asse si ricava imponendo che un punto generico $P(x;y)$ sia equidistante da *A* e da *C*, ossia: $\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2}=\sqrt{(x_C-x_P)^2+(y_C-y_P)^2}$. Si ha:

$\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(-y)^2}$ da cui, elevando al quadrato e sviluppando il quadrati:

$1-2x+\cancel{x^2}+4-4y+\cancel{y^2}=1+2x+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}$ e infine

$x+y-1=0$.

Il sistema da risolvere per trovare il centro della circonferenza è quindi $\begin{cases}2x-y+10=0\\x+y-1=0\end{cases}$. Sommando membro a membro ricaviamo l'equazione $3x+9=0$ da cui $x=-3$; sostituendo nella seconda (o nella prima che è lo stesso) si ricava $y=4$ e quindi il centro $Q_1(-3;4)$.

Il raggio è la distanza $\overline{AQ_1}$ (ovviamente è la stessa cosa se prendiamo $\overline{BQ_1}$ o $\overline{CQ_1}$).

$$r_1=\sqrt{(x_A-x_{Q_1})^2+(y_A-y_{Q_1})^2}=\sqrt{(1+3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

L'equazione della circonferenza la ricaviamo dalla definizione $\left(x-x_{Q_1}\right)^2+\left(y-y_{Q_1}\right)^2=r_1^2$, quindi $\left(x+3\right)^2+\left(y-4\right)^2=20$ da cui segue, sviluppando i calcoli, $x^2+y^2+6x-8y+5=0$.

Anche per determinare la retta con centro *C* e tangente alla retta *AB*, ci sono diversi modi; ne indichiamo due.
Nel primo modo troviamo l'equazione dalla retta *AB* ed imponiamo che la distanza di *C* dalla retta *AB* sia uguale al raggio.

La retta per *A* e *B* ha equazione $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$ da cui $x+2y-5=0$.

Imporre che la distanza di *C* dalla retta *AB* sia uguale al raggio *r* della circonferenza conduce a:
$r=\dfrac{\left|-1-5\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

L'equazione della circonferenza cercata si ricava quindi da: $\left(x-x_C\right)^2+\left(y-y_C\right)^2=r^2$, da cui $\left(x-1\right)^2+y^2=\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2$ e quindi $x^2+y^2+2x-\dfrac{31}{5}=0$.

Nel secondo modo, imponiamo la condizione di tangenza tra la retta *AB* e la generica circonferenza di centro *C* che ha equazione:

[1] $$x^2+y^2+2x+1-r^2=0.$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+1-r^2=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

ricaviamo *x* dalla seconda e sostituiamo nella prima ottenendo l'equazione di secondo grado in *y*: $5y^2-24y+36-r^2=0$. Il discriminante di questa equazione deve essere zero.

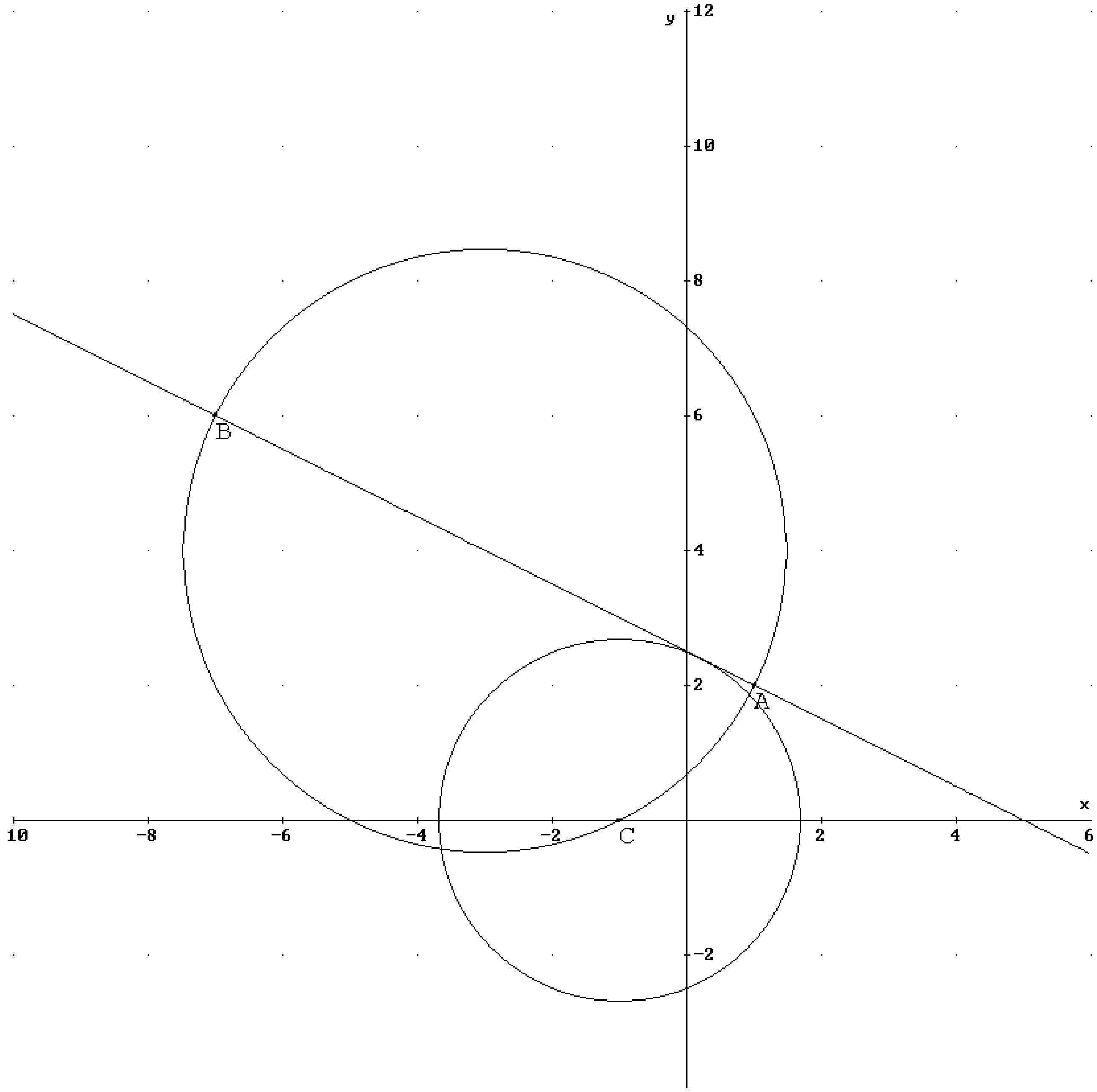
$\dfrac{\Delta}{4}=144-5\left(36-r^2\right)=0$ da cui $-36+5r^2=0$ e quindi $r=\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$ (la soluzione negativa va scartata, perché nel campo reale non ci sono circonferenze con raggi negativi). Sostituendo il valore di *r* ora trovato nella [1] si ha: $x^2+y^2+2x-\dfrac{31}{5}=0$.

In maniera alternativa.

Dal grafico si osserva che il triangolo *ABC* potrebbe essere rettangolo sull'ipotenusa *AB*. Per verificarlo dimostriamo che $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$. Facilmente si ricava $\overline{AB}=4\sqrt{5}$, $\overline{AC}=2\sqrt{2}$ e $\overline{BC}=6\sqrt{2}$ e quindi $\left(4\sqrt{5}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2$ da cui 80 = 8 + 72.

Visto ciò, si ha che il raggio della circonferenza è la metà di $\overline{AB}$, quindi $r_1=2\sqrt{5}$, il centro è il punto medio dell'ipotenusa *AB* ; $Q_1=\left(\dfrac{1-7}{2};\dfrac{2+6}{2}\right)=\left(-3;4\right)$ e quindi l'equazione della circonferenza si ricava dalla definizione: $\left(x-x_{Q_1}\right)^2+\left(y-y_{Q_1}\right)^2=r_1^2$.

Per la circonferenza di centro *C* e tangente alla retta *AB*, si osserva che il suo raggio non è altro che l'altezza relativa all'ipotenusa *AB*, quindi $r=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\left(6\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{5}}=\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$ e quindi ancora dalla definizione di circonferenza si ricava l'equazione cercata $\left(x-x_C\right)^2+\left(y-y_C\right)^2=r^2$.



y
12
10
8
6
4
2
-2
x
10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
B
A
C