Problema pag. 239 n. 19

Date le rette di equazione $2x+2ay+1-a=0$ e $(a+1)x-ay+1=0$:

a) discuti al variare di *a* le posizioni reciproche delle due rette;
b) determina i centri C_1 e C_2 dei fasci individuati da ciascuna equazione;
c) considera il punto P di ascissa 3 sull'asse del segmento C_1C_2 e determina i raggi *r* e *R* delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo C_1C_2P.

Soluzione

a) Ricordiamo che in generale due rette: $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ sono parallele se e solo se $m=m'$, ossia $ab'-a'b=0$; sono perpendicolari se e solo se $mm'=-1$, ossia $aa'+bb'=0$.

Individuiamo le rette parallele. Le rette dei fasci saranno parallele se e solo se: $2(-a)-(a+1)(2a)=0$, da cui segue $a^2+2a=0$ e quindi $a=0$ e $a=-2$.

Per $a=0$ le rette parallele sono $x=-\frac{1}{2}$ e $x=-1$; per $a=-2$ le rette sono e $x-2y-1=0$.

Per $a\neq 0$ e $a\neq -2$ le rette dei due fasci sono incidenti, in particolare sono perpendicolari se e solo se $2(a+1)+(2a)(-a)=0$, da cui segue $a^2-a-1=0$ le cui soluzioni sono: $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

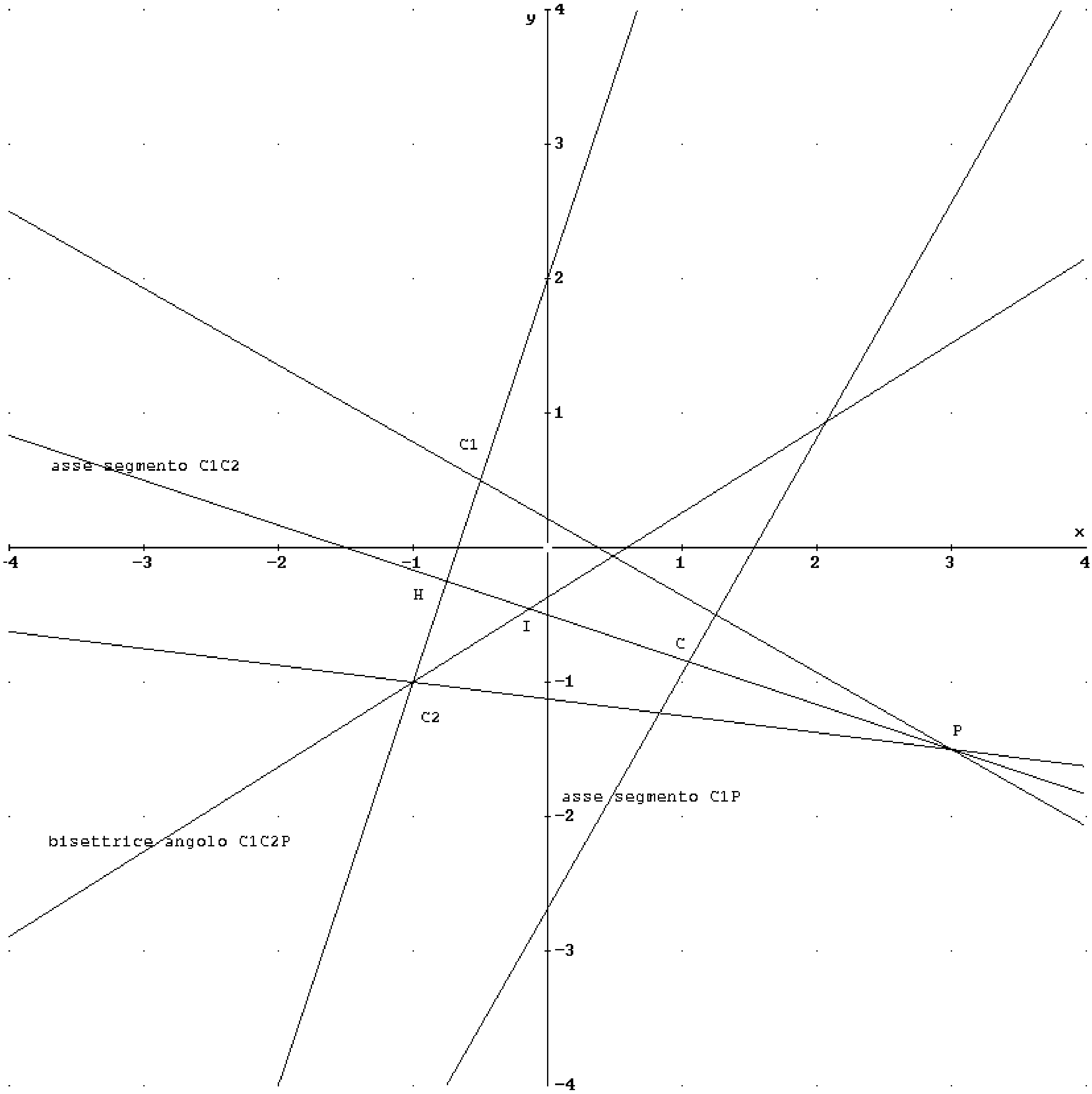
Per $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ le rette perpendicolari sono $4x+2\left(1-\sqrt{5}\right)y+1+\sqrt{5}=0$ e $\left(3-\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{5}-1\right)y+2=0$; per $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le rette perpendicolari sono $4x+2\left(1+\sqrt{5}\right)y+1-\sqrt{5}=0$ e $\left(3+\sqrt{5}\right)x-\left(1+\sqrt{5}\right)y+2=0$.

b) I due fasci possono essere scritti nella forma: $2x+1+a(2y-1)=0$ e $x+1+a(x-y)=0$.

Il centro del primo fascio, C_1, si ricava risolvendo il sistema di equazioni: $\begin{cases}2x+1=0\\2y-1=0\end{cases}$. Si ha $C_1=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Il centro del secondo fascio, C_2, si ricava risolvendo il sistema di equazioni: $\begin{cases}x+1=0\\x-y=0\end{cases}$. Si ha $C_2=(-1;-1)$.

c) Il centro della circonferenza inscritta è l'incentro che è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo: *r* è il raggio di tale circonferenza ed è la distanza dai lati del triangolo che risultano quindi tangenti alla circonferenza.
Il centro della circonferenza circoscritta è il circocentro che è il punto di incontro degli assi dei lati del triangolo: *R* è il raggio di tale circonferenza ed è la distanza dai vertici del triangolo.

Osserviamo subito che, poiché P sta sull'asse del segmento C_1C_2, il triangolo C_1C_2P è isoscele di vertice P e, detto H il punto medio del segmento C_1C_2, PH è altezza, mediana, bisettrice del triangolo. Determiniamo le coordinate di H. $H=\left(\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{2};\dfrac{\frac{1}{2}-1}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{4}\right)$.



Troviamo quindi l'asse del segmento C_1C_2. Indicando con $Q=(x;y)$ le coordinate di un generico punto dell'asse, deve essere $\overline{QC_1}=\overline{QC_2}$, ossia

$$\sqrt{\left(x_Q-x_{C_1}\right)^2+\left(y_Q-y_{C_1}\right)^2}=\sqrt{\left(x_Q-x_{C_2}\right)^2+\left(y_Q-y_{C_2}\right)^2}.$$

Elevando al quadrato e sostituendo si ha $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$ sviluppando i calcoli si ricava che l'asse del segmento C_1C_2 ha equazione: $2x+6y+3=0$.
Il punto P ha ascissa 3 e sta sull'asse del segmento, quindi le sue coordinate soddisfano l'equazione

dell'asse, si ha $2\cdot 3+6y+3=0$ e quindi le coordinate di P sono $\mathrm{P}=\left(3;-\frac{3}{2}\right)$.

Utilizzando l'equazione della retta passante per due punti, scriviamo le equazioni delle rette che passano per C_1 e C_2 ($3x-y+2=0$), per C_1 e P ($3x-y+2=0$) e per C_2 e P ($x+8y+9=0$).

Determiniamo *r*. Per fare ciò dobbiamo innanzi tutto determinare l'incentro I facendo l'intersezione tra due bisettrici degli angoli interni del triangolo, una delle quali è l'asse del segmento C_1C_2 trovato sopra. Poi $r=\overline{\mathrm{HI}}$.

Ricordando che la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati, cerchiamo l'equazione della bisettrice dell'angolo $\mathrm{C_1}\widehat{\mathrm{C_2}}\mathrm{P}$. Detto $\mathrm{Q}=(x;y)$ un generico punto della bisettrice si ha:

$$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|x+8y+9|}{\sqrt{1+8^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|x+8y+9|}{\sqrt{65}} \quad\Rightarrow\quad \frac{|3x-y+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x+8y+9|}{\sqrt{13}}$$

da cui, tenendo conto del significato del valore assoluto, si ha:

$$\frac{3x-y+2}{\sqrt{2}}=\frac{x+8y+9}{\sqrt{13}} \qquad \text{e} \qquad \frac{3x-y+2}{\sqrt{2}}=-\frac{x+8y+9}{\sqrt{13}}$$

Sviluppando i calcoli della prima equazione si ottiene:

$$x\left(39\sqrt{2}-2\sqrt{13}\right)-y\left(13\sqrt{2}+16\sqrt{13}\right)-18\sqrt{13}+26\sqrt{2}=0.$$

Osserviamo che il coefficiente angolare della retta è $m=\frac{39\sqrt{2}-2\sqrt{13}}{13\sqrt{2}+16\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{26}-11}{23}\approx 0.63$ e quindi positivo. La retta forma quindi, con la direzione positiva dell'asse delle *x*, un angolo minore di 90°. poiché l'equazione dell'altra bisettrice (che è perpendicolare alla prima) avrà coefficiente angolare negativo $m'=-\frac{1}{m}=-\frac{23}{5\sqrt{26}-11}\approx -1.59$, essa sarà la bisettrice dell'angolo esterno. La retta trovata è quindi la bisettrice dell'angolo $\mathrm{C_1}\widehat{\mathrm{C_2}}\mathrm{P}$.

Cerchiamo ora le coordinate di I risolvendo il sistema formato dalle due bisettrici:

$$\begin{cases} x\left(39\sqrt{2}-2\sqrt{13}\right)-y\left(13\sqrt{2}+16\sqrt{13}\right)-18\sqrt{13}+26\sqrt{2}=0 \\ 2x+6y+3=0 \end{cases}$$

Ricavando *y* dalla seconda e sostituendo nella prima si ha

$$\begin{cases} x\left(39\sqrt{2}-2\sqrt{13}\right)-\left(-\frac{2x+3}{6}\right)\left(13\sqrt{2}+16\sqrt{13}\right)-18\sqrt{13}+26\sqrt{2}=0 \\ y=-\frac{2x+3}{6} \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $\mathrm{I}=\left(\frac{3\sqrt{26}-18}{20};-\frac{\sqrt{26}+4}{20}\right)$ e quindi

$$r=\overline{\mathrm{HI}}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{H}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{I}}-y_{\mathrm{H}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{26}-18}{20}+\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{26}+4}{20}+\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{2\sqrt{65}-\sqrt{10}}{20}.$$

Determiniamo *R*. Per fare ciò dobbiamo innanzi tutto determinare il circocentro C facendo l'intersezione tra due assi dei lati del triangolo. L'asse del segmento C_1C_2 l'abbiamo trovato sopra. Poi R è la distanza tra C e uno dei vertici del triangolo.

Troviamo l'asse del segmento C_1P: indicate con $\mathrm{Q}=(x;y)$ le coordinate di un generico punto dell'asse del segmento C_1P, deve essere $\overline{\mathrm{QC_1}}=\overline{\mathrm{QP}}$, ossia

$$\sqrt{\left(x_Q - x_{C_1}\right)^2 + \left(y_Q - y_{C_1}\right)^2} = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2}\ .$$

Elevando al quadrato e sostituendo si ha $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = (x-3)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2$, sviluppando i calcoli si ricava che l'asse del segmento C_1P ha equazione: $28x-16y-43=0$. Il circocentro si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 28x-16y-43=0 \\ 2x+6y+3=0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $C=\left(\frac{21}{20};-\frac{17}{20}\right)$ e quindi

$$R=\overline{CC_1} = \sqrt{\left(x_C - x_{C_1}\right)^2 + \left(y_C - y_{C_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{20}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{17}{20}-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{13}{20}\sqrt{10}\ .$$