SIMULAZIONE DELLA II PROVA SCRITTA[1] – 30 maggio 2017

Nome del candidato ____	Classe_______________
Il candidato risolva uno dei due problemi; il problema da correggere è il numero ___________	

Problema 1

Il direttore dello zoo di Berlino desidera far costruire uno scivolo (fig. 1) da collocare al bordo della vasca degli orsi.

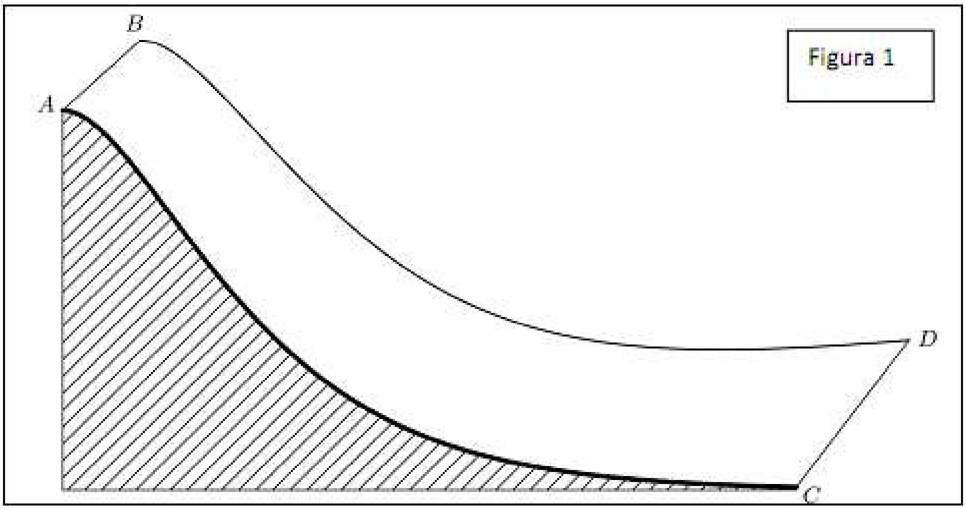


Figura 1

La parete anterior dello scivolo è una superficie piana (tratteggiata in fig. 1), il cui bordo superiore è la curva AC ; tale curva, in un sistema di riferimento cartesiano in cui l'unità su entrambi gli assi è il metro, può essere ben modellizzata come grafico di una funzione $y = f(x)$ (fig.2) della forma $y = f(x) = (ax+b)\cdot e^{-x}$ con $x \in [1,8]$, ove a, b sono <u>numeri interi non negativi</u>.

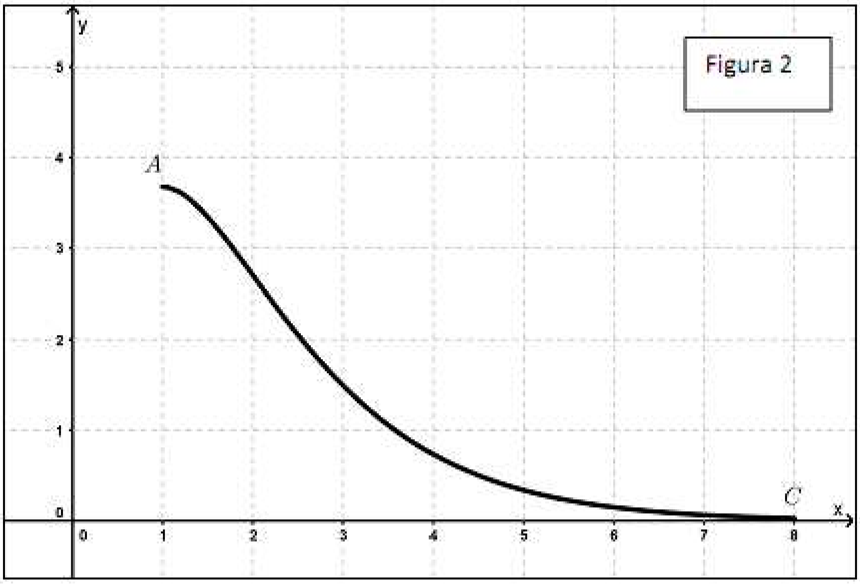


Figura 2

[1] Durata massima della prova: 5 ore. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non saranno consentite uscite prima delle ore 11:00; la verifica non potrà essere consegnata prima delle 12.03; dopo le ore 12.03 agli studenti che avranno consegnato la prova sarà consentita l'uscita dall'istituto.

1. Determina i valori dei parametri a, b sapendo che in A lo scivolo deve avere pendenza nulla e sapendo che l'altezza massima dello scivolo deve essere compresa tra 3,5 e 4 metri. Giustifica i passaggi. Dopo aver trovato i valori di a, b, verifica che con questo modello la distanza di C dalla superficie su cui poggia la struttura è inferiore a 3 cm.

Nota: nel séguito è fornita passerella per i valori di *a*, *b*; pertanto è richiesta particolare precisione nella determinazione degli stessi.

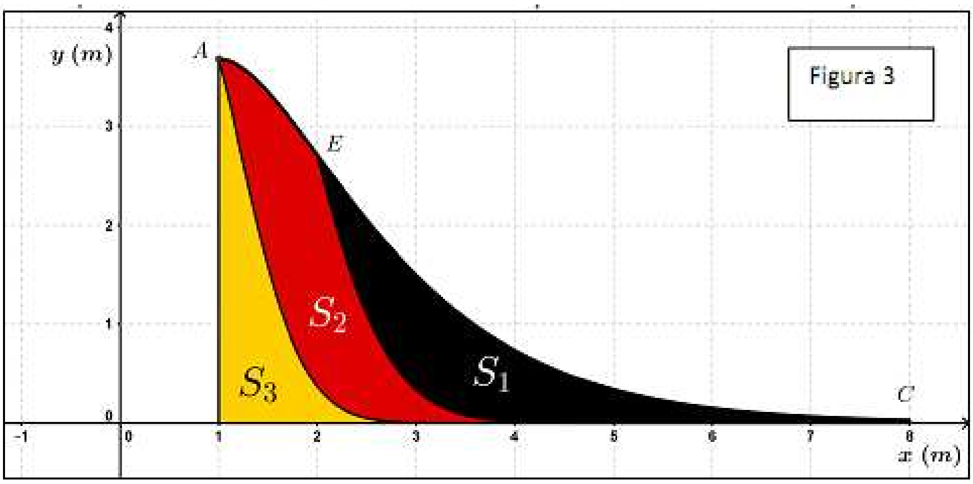
D'ora in avanti utilizzerai per f i valori di a, b trovati nella richiesta 1 e che vengono forniti a titolo di verifica: $a = 10$, $b = 0$ da cui si ha, quindi, $y = f(x) = 10x \cdot e^{-x}$ con $1 \le x \le 8$.

Il direttore vuole far dipingere la parete anteriore della struttura che sostiene lo scivolo (ossia quella evidenziata con un tratteggio in fig. 1). La parete viene suddivisa in tre regioni S_1, S_2, S_3 che verranno dipinte con i colori della bandiera tedesca: S_1 in nero, S_2 in rosso e S_3 in oro (fig. 3). Il bordo che separa S_2 da S_3 è descritto da una funzione della forma $y = g(x) = c \cdot x \cdot e^{-x^2}$; il vertice superiore di tale bordo è il punto A ; il bordo che separa S_2 da S_1 è descritto da una funzione della forma $y = r(x) = c \cdot x \cdot e^{-dx^2}$; il vertice superiore di tale bordo è il punto E di ascissa 2.

Nota: presta attenzione al fatto che sia il bordo descritto da *g* che quello descritto da *r* hanno quale punto di ascissa maggiore *x* = 8, laddove, osservando la figura, essi parrebbero terminare in punti di ascissa minore di 8, ma così non è.

La ditta che si occupa della pittura della parete per effettuare il lavoro richiede 50 €/m^2 a cui va sommato il costo delle vernici; la vernice rossa e la vernice nera hanno lo stesso costo, pari a 18 €/L, ma diversa resa (quantità di vernice, qui in litri, che serve per dipingere un m^2): per la vernice nera essa è pari a 1,5 L/m^2 laddove per la rossa essa vale 1,3 L/m^2; la vernice color oro ha invece un costo di 24 €/L e una resa pari a 3,1 L/m^2.

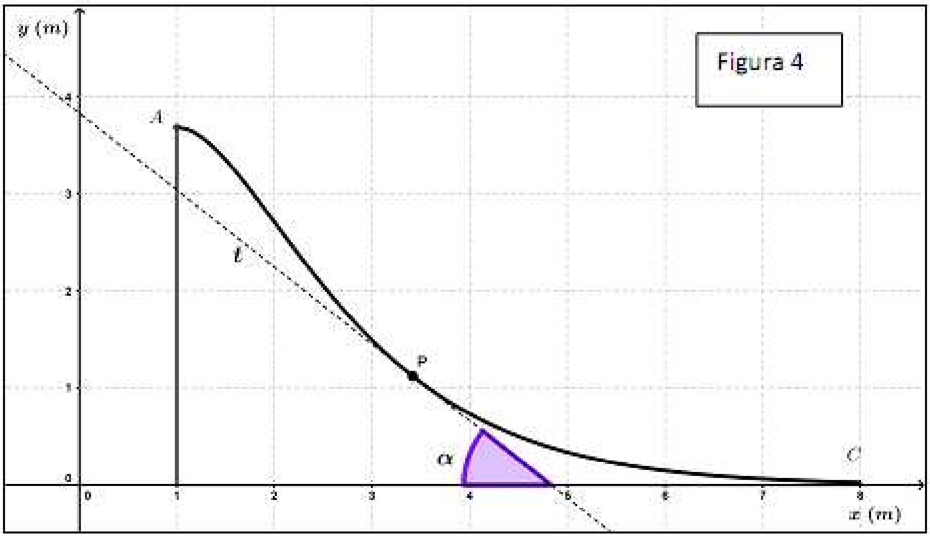
2. Determina i valori dei parametri c, d ; calcola i valori esatti delle aree delle regioni S_1, S_2 , S_3 e calcola infine il costo complessivo che deve sostenere lo zoo per la verniciatura della parete.



Sia P un punto del grafico di f distinto da A e sia t la retta tangente al grafico di f in P e sia α l'angolo <u>acuto</u> che tale retta forma con l'asse delle x (figura 4); tale angolo, variabile al variare di P, dà una misura dell'inclinazione dello scivolo.

3. Calcola il valore (esatto) α_{max} che viene raggiunto in corrispondenza della massima inclinazione e stabilisci se lo scivolo così progettato rispetta o meno il vincolo di sicurezza in base al quale si richiede che α non superi mai i 55°.

Calcola, inoltre, a quale distanza *H* da terra ci si trova nell'istante in cui si transita dal punto di massima inclinazione dello scivolo.



La larghezza (o profondità) dello scivolo non è costante, ma cresce linearmente dal valore iniziale dato da AB = 1 m al valore finale dato da CD = 2 m, ossia le sezioni della struttura con piani perpendicolari all'asse *x* (e quindi paralleli al piano *yz*) sono rettangoli la cui dimensione $h(x)$ parallela all'asse delle *z* varia linearmente da 1 m a 2 m (figure 5a e 5b).

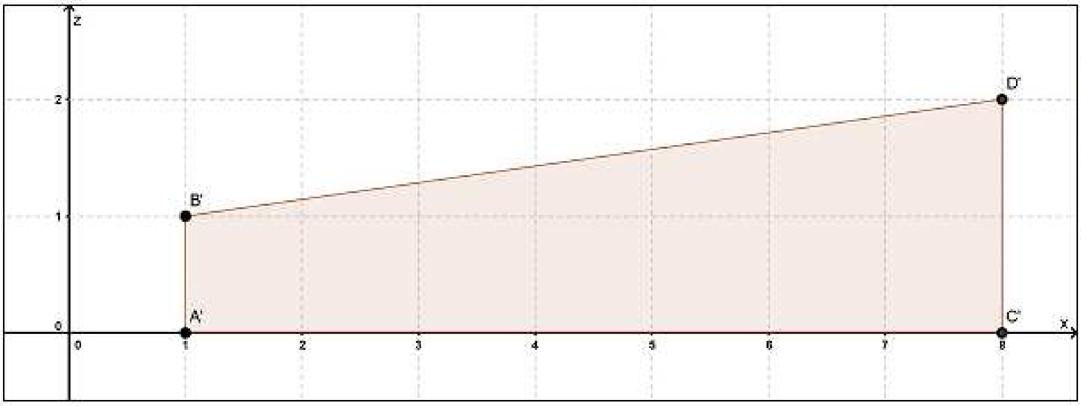
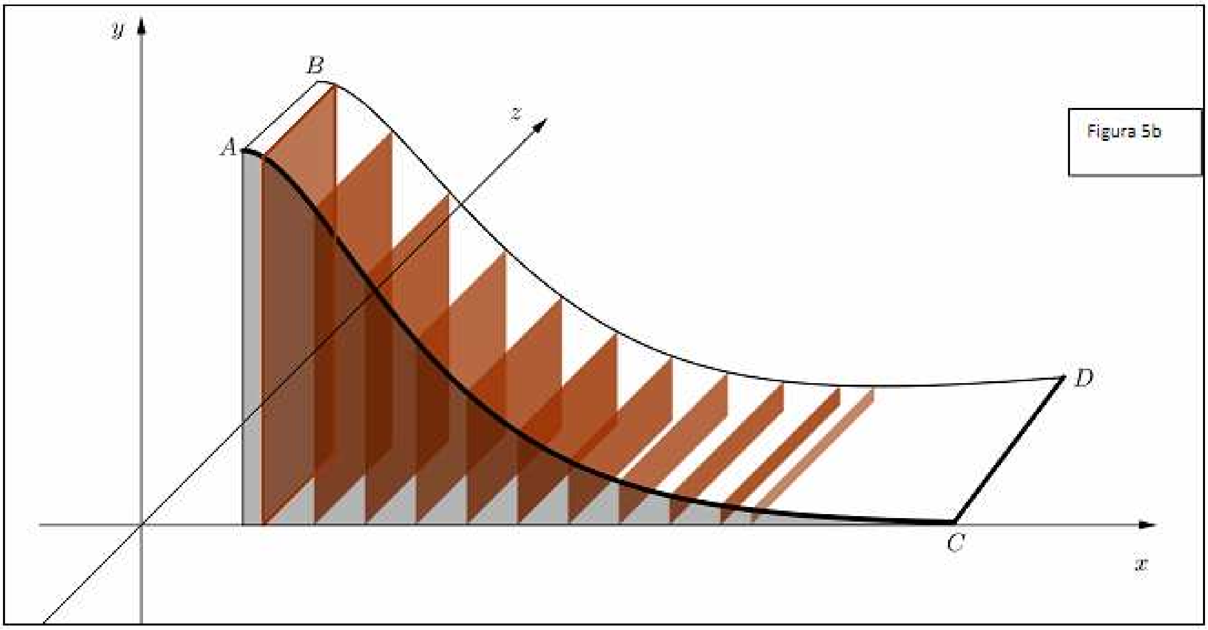


Figura 5a *visione dall'alto*: A',B',C',D' sono le proiezioni di A,B,C,D nel piano *xz*



4. Calcola il volume, in m^3, della struttura che sorregge lo scivolo (fornisci il valore esatto e un valore approssimato ai centesimi di m^3).

Problema 2

Considera la funzione $y = f_a(x) = a^2 x - \frac{1}{3}x^3$ ove a è un parametro reale positivo (si tratta quindi di una famiglia di funzioni dipendenti dal parametro a).

1. Effettua lo studio completo della funzione f_a (ricordando che $a > 0$) e disegna un grafico che ne fornisca l'andamento qualitativo; si suggerisce di scegliere sull'asse delle x (e di conseguenza anche sull'asse delle y per avere un riferimento monometrico) il valore a quale ''unità'', ricordando in ogni caso che a non è un parametro metrico, ma un numero puro. Detto M_a il punto di massimo relativo della funzione f_a, determina inoltre l'equazione cartesiana della curva Γ costituita da tali punti al variare di a (ossia determina l'equazione del luogo Γ dei punti di massimo relativo delle funzioni f_a), verificando in particolare che tale curva è il grafico di una funzione $y = h(x)$ di cui si chiede esplicitamente il dominio D_h.

2. Sia S la superficie contenente l'origine delimitata dal grafico di f_a , dall'asse delle x e dalla retta r_a parallela all'asse delle y e passante per il punto M_a. Sia W_1 i solido generato dalla rotazione completa di S attorno all'asse delle x e sia W_2 il solido generato dalla rotazione completa di S attorno all'asse delle y. Determina per quale valore di a (ricordando che $a > 0$) il rapporto tra i volumi dei solidi W_1 e W_2 vale $\frac{34}{21}$; a titolo di verifica si fornisce tale valore: $a = 2$.

3. Considera ora la funzione $y = f_2(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ (ossia f_2 è ottenuta da f_a per $a = 2$) e il punto $Q(2,8)$; determina le equazioni delle rette tangenti al grafico di f_2 condotte da Q; dopo aver constatato che tali rette tangenti sono due, calcola l'area della regione limitata R avente per bordo il grafico di f_2 e le due rette tangenti.

4. Considera infine la funzione $y = f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ con $0 \le x \le 2$ (ossia f è la restrizione all'intervallo indicato di f_2 , ottenuta da f_a per $a = 2$); spiega perché f (intesa come funzione tra I = [0,2] e $f(I)$ è invertibile e successivamente, detta $x = g(y)$ la funzione inversa di f, calcola $g'\left(\frac{11}{3}\right)$ riportando anche gli opportuni riferimenti teorici.

SIMULAZIONE DELLA II PROVA SCRITTA – 30 maggio 2017

Nome del candidato ______________________________	Classe ______________				
Il candidato risolva cinque dei dieci quesiti; i quesiti da correggere sono i numeri:	_____	_____	_____	_____	_____

Quesiti

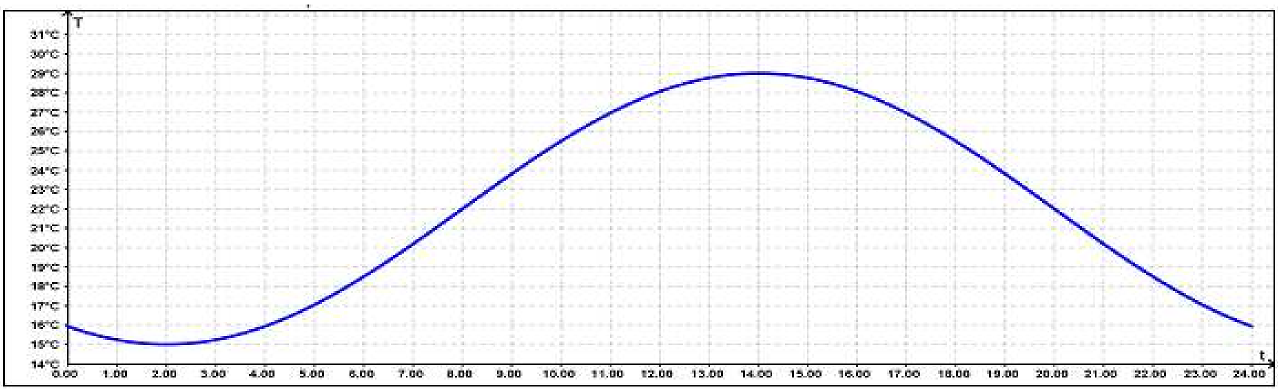
1. Considera la funzione $f(x)=\begin{cases}6x^2+hx+2 & \text{se } k\le x<0\\ \ell e^x-1 & \text{se } 0\le x\le ln2\end{cases}$ con $h,k,\ell\in R$.

   Determina i valori dei parametri reali h, k, ℓ in modo tale che f soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $I = [k, \ln 2]$; utilizzando i valori trovati, determina il valore c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

2. Lanci un dado regolare 10 volte.
   a) Quanto vale la probabilità che esca esattamente per 3 volte la faccia "sei"?
   b) Quanto vale la probabilità che esca almeno 3 volte la faccia "sei"?
   c) Quanto vale la probabilità che esca al massimo 3 volte la faccia "sei"?

   Motiva tutte le risposte

3. Prendiamo in esame la temperatura rilevata in un ufficio in una giornata. Se non si accende l'aria condizionata, la temperatura T, misurata in °C, segue la legge $T(t)=22+7\,sin\left(\frac{\pi(t-8)}{12}\right)$ ove T è espressa in funzione del numero t di ore trascorso dopo la mezzanotte (ossia, di fatto, T è espressa in funzione dell'orario t).



   a) Si imposta il termostato del condizionatore affinché la temperatura non superi mai i 22°C; il costo orario del condizionatore è di 0.10 € per ogni grado eccedente i 22°C; a quanto ammonta la spesa in una giornata?

4. Sia $F_a(x)=\int_0^x arctan\left(t^\alpha\right)dt$; ove $\alpha > 0$ è un parametro reale.

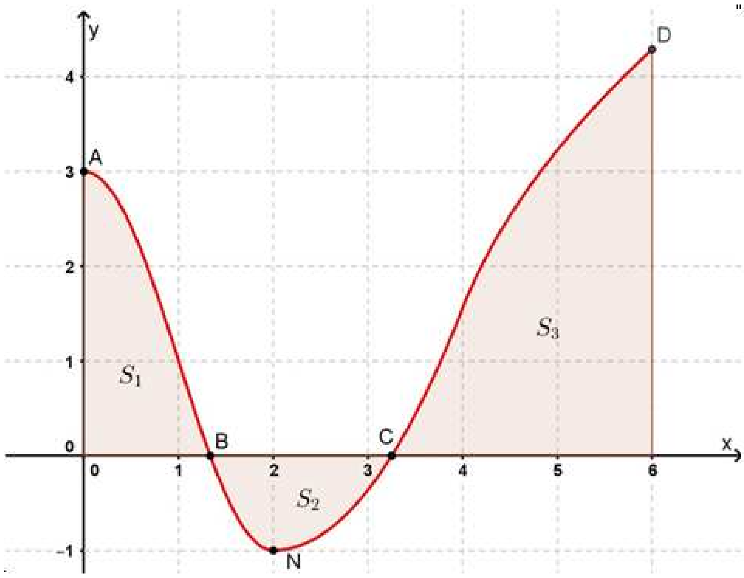
   Calcola, al variare di α, $L_a = \lim_{x\to0^+}\frac{F_a(x)}{x^3}$.

5. Nello spazio è fissato un riferimento cartesiano ortogonale e monometrico $Oxyz$ e sono dati i

punti $A(1, 2, -1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(1, -2, -2)$ e $P(-5, -1, 11)$, $Q(-9, 3, 10)$.
Scrivi le equazioni del piano α passante per *A*, *B*, *C* e della retta *r* passante per *P* e *Q* e fai vedere che la retta *r* è parallela al piano α; trova quindi la distanza *d* di *r* da α.

6. Si consideri questa equazione differenziale: $y''+2y'+2y=x$.
Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.
a) $y=e^{-x}(senx+\cos x)+x$
b) $y=2e^{-x}+x$
c) $y=e^{-x}(senx+\cos x)+\frac{1}{2}(x-1)$
d) $y=e^{-2x}+x$.

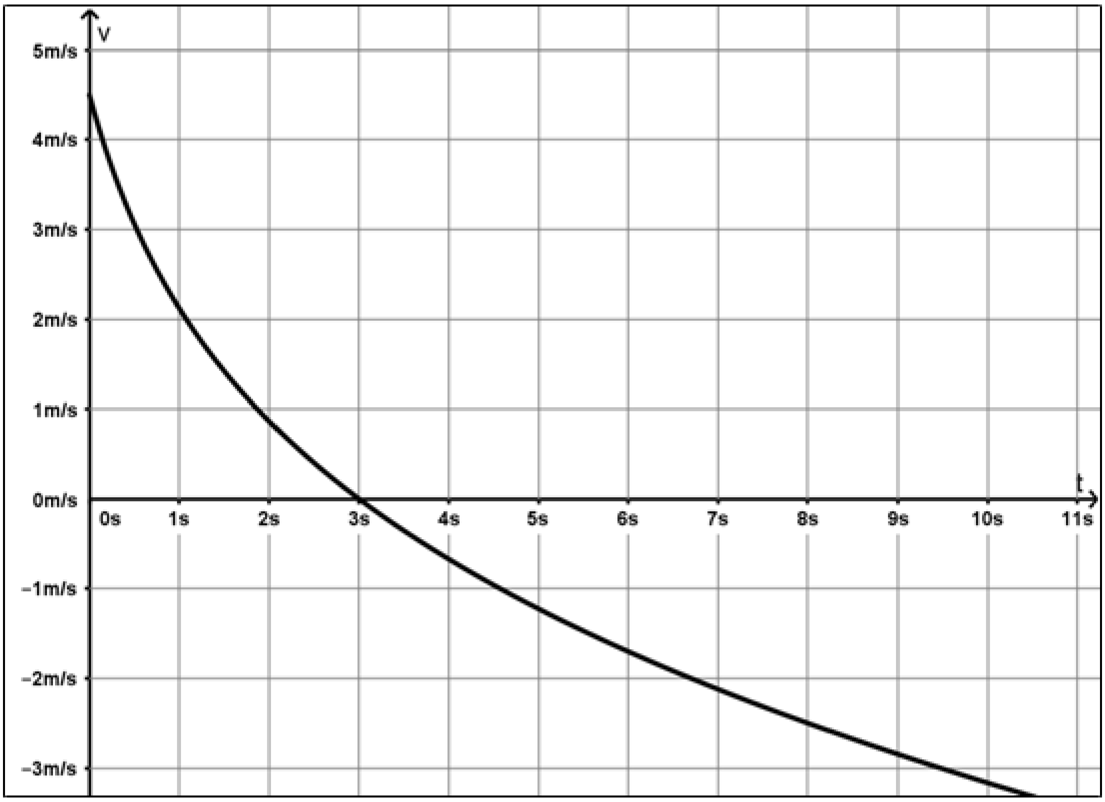
7. Osserva il grafico di $y=f(x)$ funzione continua e derivabile, definita per $0\le x\le 6$ e considera la funzione integrale $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ anch'essa definita, quindi, per $0\le x\le 6$ .Si conoscono le coordinate dei seguenti punti del grafico di *f*: $A(0,3)$, $B\left(\frac{4}{3},0\right)$ (zero di *f*), $N(2,-1)$ (punto di minimo per *f*), $C\left(\frac{13}{4},0\right)$ (zero di *f*), $D\left(6,\frac{17}{4}\right)$. Sono note inoltre le aree delle tre regioni limitare S_1, S_2, S_3 aventi per bordo il grafico di *f* e l'asse *x*: $A(S_1)=\frac{9}{4}$, $A(S_2)=\frac{5}{4}$, $A(S_3)=\frac{27}{4}$.



a) Calcola i valori di $F(0)$, $F\left(\frac{4}{3}\right)$, $F\left(\frac{13}{4}\right)$, $F(6)$;
b) determina gli intervalli di monotonia e i punti estremanti relativi (entrambe le coordinate);
c) determina gli intervalli di concavità/convessità e le ascisse dei punti di flesso ;
d) rappresenta un grafico di *F* coerente con le informazioni trovate.

8. Individua il numero dei punti stazionari della funzione $y=x\ln x-\frac{1}{2}mx^2-x$ al variare del parametro reale *m*.

9. Un punto materiale si muove lungo una retta; fissato sulla retta un sistema di riferimento, la posizione s (misurata in metri) occupata dal punto materiale in funzione del tempo t (misurato in secondi) sarà espressa dalla legge oraria: $s = s(t)$ con $t \geq 0$ che non viene fornita. È noto che all'istante $t = 0$ si ha $s = 0$ (ossia il corpo parte dall'origine) ed è data la <u>legge che esprime la velocità in funzione del tempo</u> $v = v(t) = \dfrac{9-3t}{2\sqrt{t+1}}$ con $t \geq 0$, della quale viene riportato anche il grafico:



a) Calcola l'accelerazione posseduta dal punto materiale dopo 3 s.
b) Calcola lo spostamento Δs effettuato dal corpo nei primi 8 secondi e la distanza d effettivamente percorsa nei primi 8 secondi.

10. Scrivi l'equazione della circonferenza Γ tangente al grafico della funzione $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso E e sulla quale l'asse y individua un diametro.

GRIGLIA DI VALUTAZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

CRITERI	**Problema A** (*Valore massimo attribuibile 75)*	**Problema B** (*Valore massimo attribuibile 75)*	**Quesiti (*Valore massimo attribuibile 75/150 = 15x5)***										**P.T.**
			Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Q9**	**Q10**	
COMPRENSIONE e CONOSCENZA *Comprensione della richiesta. Conoscenza dei contenuti matematici.*	(0-20)	(0-20)	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	
ABILITA' LOGICHE e RISOLUTIVE *Abilità di analisi. Uso di linguaggio appropriato. Scelta di strategie risolutive adeguate.*	(0-20)	(0-20)	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	
CORRETTEZZA dello SVOLGIMENTO *Correttezza nei calcoli. Correttezza nell'applicazione di Tecniche e Procedure anche grafiche.*	(0-20)	(0-20)	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	(0-4) ___	
ARGOMENTAZIONE *Giustificazione e Commento delle scelte effettuate.*	(0-15)	(0-15)	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	(0-3) ___	
Punteggio totale													

Calcolo del punteggio Totale

PUNTEGGIO PROBLEMA	PUNTEGGIO QUESITI	**PUNTEGGIO TOTALE**

Tabella di conversione dal punteggio grezzo al voto in quindicesimi

Punti	0-4	5-10	11-18	19-26	27-34	35-43	44-53	54-63	64-74	75-85	86-97	98-109	110-123	124-137	138-150
Voto/15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Punti	0-7	8-23	24-38	39-54	55-74	75-89	90-104	105-119	120-134	135-150
Voto/10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Voto assegnato ____ /15 **Il docente**

Voto assegnato ____ /10 ______________________________