Macerata 27 novembre 2015 – classe 4M – COMPITO DI MATEMATICA

Risolvere le seguenti equazioni goniometriche

1	punti 10	$sen\left(5x-\frac{\pi}{18}\right)=sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	$x=\frac{2}{27}\pi+\frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x=\frac{8}{63}\pi+\frac{2}{7}k\pi$
2	punti 10	$\sqrt{3}senx+\cos x=1$	$x=2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$
3	punti 10	$\cos 2x+3senx=2$	$x=\frac{1}{6}\pi+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \quad \vee$ $x=\frac{1}{2}\pi+2k\pi$

Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche

4	punti 10	$2sen^2x-\cos x-1>0$	$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\pi+2k\pi \quad \vee$ $\pi+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$
5	punti 10	$\frac{senx+\cos x}{tgx-1}\geq 0$ con $0\leq x\leq 2\pi$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{4}\pi\leq x<\frac{5}{4}\pi \quad \vee$ $\frac{3}{2}\pi<x\leq\frac{7}{4}\pi$

Risolvi il seguente sistema goniometrico

6	punti 20	$\begin{cases} 2\cos x+1\leq 0 \\ 3tgx+\sqrt{3}>0 \end{cases}$ con $0\leq x\leq 2\pi$	$\frac{5}{6}\pi<x\leq\frac{4}{3}\pi$

Determinare per quali valori del parametro $k\in\mathbb{R}$ le seguenti equazioni risultano soddisfatte negli intervalli indicati:

7	punti 20	$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+2-k=0$ $0<x\leq\frac{2}{3}\pi$	1 sol. per $4-\sqrt{3}\leq k\leq\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ 2 sol. per $\frac{13}{8}\leq k<4-\sqrt{3}$
8	punti 20	$\sqrt{3}\cos x+3senx-3k=0$ $-\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$	1 sol. per $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leq k<1$ 2 sol. per $1\leq k\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$

SOLUZIONE

1) Ricorda che un'equazione del tipo $sen\alpha = sen\alpha'$ ammette le soluzioni $\alpha = \alpha' + 2k\pi$ e $\alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Si ha quindi

$$5x - \frac{\pi}{18} = 2x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$3x = \frac{2}{9}\pi + 2k\pi$$
$$x = \frac{2}{27}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

e

$$5x - \frac{\pi}{18} + 2x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$$
$$7x = -\frac{1}{9}\pi + \pi + 2k\pi$$
$$x = \frac{8}{63}\pi + \frac{2}{7}k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

2) Vediamo due modi per risolvere questa equazione.
MODO 1 – Dividiamo ambo i membri dell'equazione per 2 ed otteniamo

$$\frac{\sqrt{3}}{2}senx + \frac{1}{2}cos\,x = \frac{1}{2}$$

Ricorda che $cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, per cui possiamo scrivere

$$\frac{\sqrt{3}}{2}senx + \frac{1}{2}cos\,x = senx\,cos\frac{\pi}{6} + cos\,xsen\frac{\pi}{6} = sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

abbiamo utilizzato le formule di addizione. L'equazione da risolvere è quindi $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ le cui soluzioni sono

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$	e	$x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

MODO 2 – L'equazione è un'equazione lineare in seno e coseno per cui utilizziamo le formule parametriche $senx = \frac{2t}{1+t^2}$ e $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ dove $t = tg\frac{x}{2}$. Ricaviamo:

$$\sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$
$$2\sqrt{3}t + 1 - t^2 = 1 + t^2$$
$$2\sqrt{3}t - 2t^2 = 0$$
$$t\left(t - \sqrt{3}\right) = 0$$

da cui ricaviamo le due soluzioni $t = 0$ e $t = \sqrt{3}$ ossia:

$tg\frac{x}{2}=0$ $\frac{x}{2}=k\pi$ $x=2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$	e	$tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi$ $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

3) Utilizzando le formule di duplicazione per il coseno possiamo scrivere l'equazione nella forma: $1-2sen^2x+3senx=2$, ossia $2sen^2x-3senx+1=0$ da cui le soluzioni $senx=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}$ e quindi le equazioni elementari

$senx=\frac{1}{2}$ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$	e	$senx=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

4) Ricordando che $sen^2x=1-cos^2x$ possiamo scrivere l'equazione nella forma $2cos^2x+cos\,x-1<0$. Posto $cos\,x=t$, risolviamo la disequazione di secondo grado $2t^2+t-1<0$ che ammette soluzioni per $-1<t<\frac{1}{2}$ e quindi $-1<cos\,x<\frac{1}{2}$. Nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$ si ha quindi $\frac{\pi}{3}<x<\pi \quad \vee \quad \pi<x<\frac{5}{3}\pi$ (vedi figura 1), ossia $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\pi+2k\pi \quad \vee$

$\pi+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

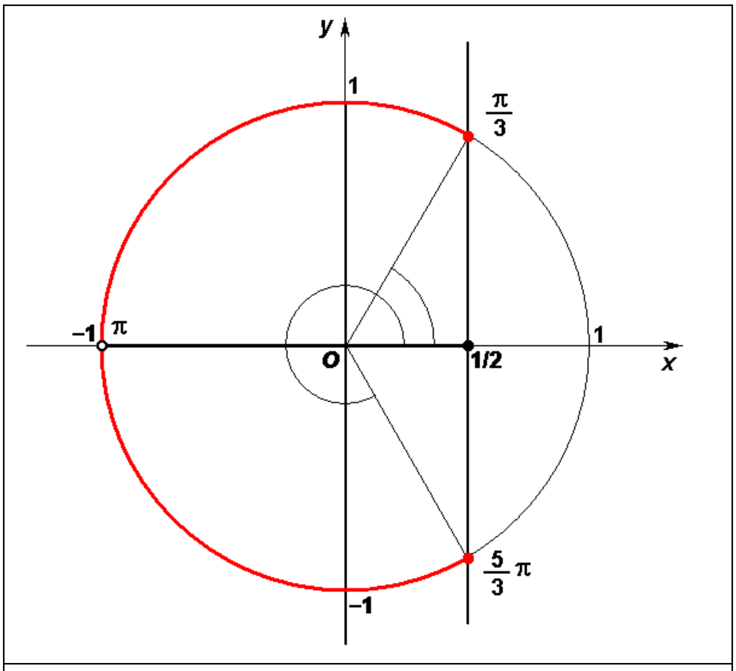

Figura 1

5) Si tratta di una disequazione fratta, sarà quindi soddisfatta quando il numeratore e il denominatore hanno lo stesso segno nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$.
Iniziamo con lo studio del segno del numeratore; scriviamo la disequazione nella forma $senx>-cos\,x$ e ci aiutiamo con i grafici del seno e del coseno. Posto $y=senx$, si tratta di vedere quanto tale curva sta al di sopra della curva $y=-cos\,x$ (vedi figura) e quando sta al di sotto.

Ricordando che $senx=-cos\,x$ per $x=\frac{3}{4}\pi \quad \vee \quad x=\frac{7}{4}\pi$, si ha :

$senx+cos\,x>0$ per $0<x<\frac{3}{4}\pi \quad \vee \quad \frac{7}{4}\pi<x<2\pi$

$senx + cos\,x = 0$ per $x = \frac{3}{4}\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{4}\pi$

$senx + cos\,x < 0$ per $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

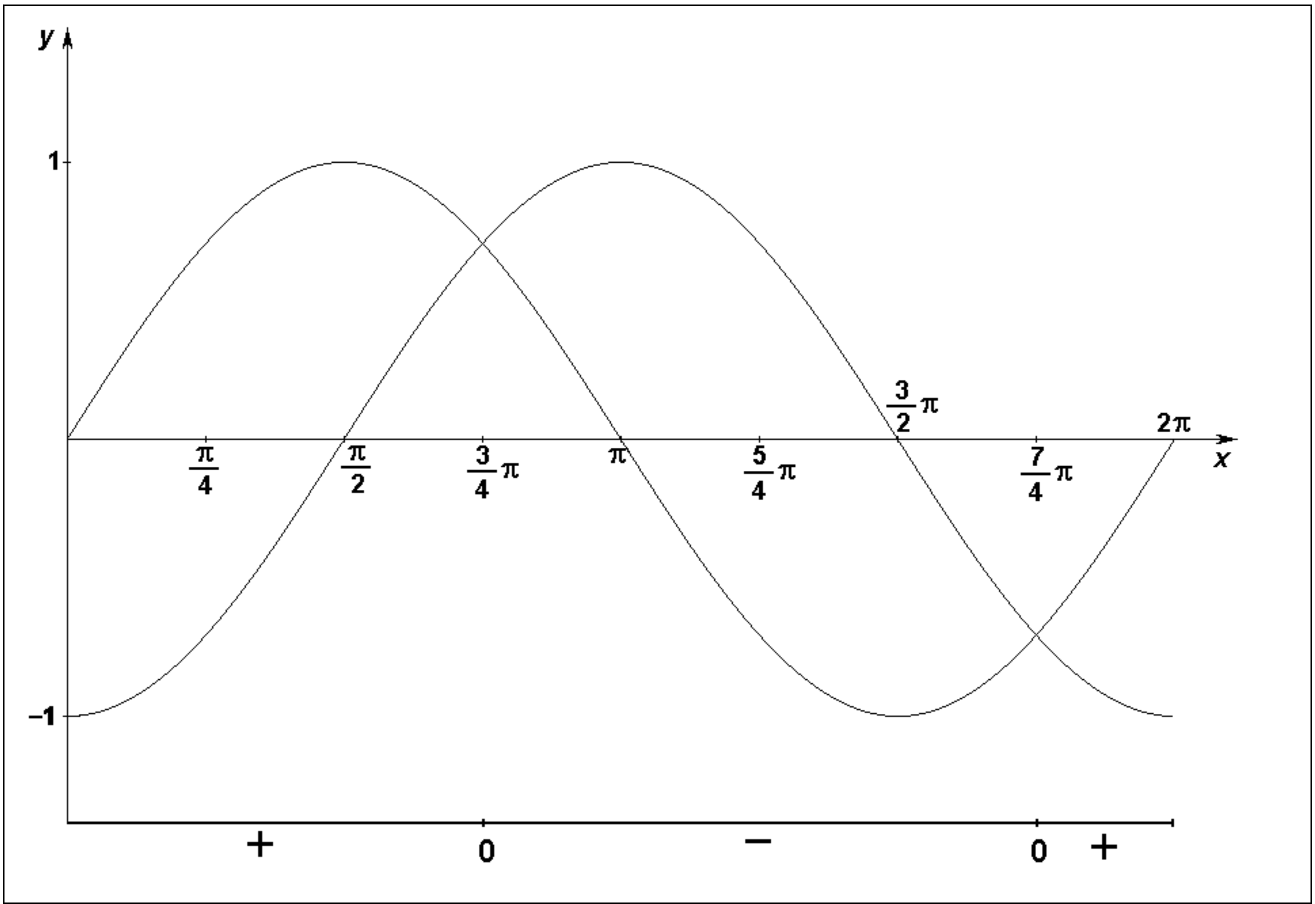

Figura 2

Per il denominatore, utilizzando il grafico della tangente ($y = tgx$), si tratta di vedere quando questo è al di sopra o al di sotto della retta $y = 1$. Si ha (vedi anche figura 3):

$tgx - 1 > 0$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

$tgx - 1 = 0$ per $x = \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \frac{5}{4}\pi$

$tgx - 1 < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{4}\pi \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

Riassumendo

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π		$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$		2π
N	|	+	|	+	|	+	0	−	|	−	|	−	|	−	0	+	|
D	|	−	0	+	$\nexists$	−	|	−	|	−	0	+	$\nexists$	−	|	−	|
N/D	|	−	$\nexists$	+	$\nexists$	−	0	+	|	+	$\nexists$	−	$\nexists$	+	0	−	|

Per cui, nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ la disequazione è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{4}\pi \le x < \frac{5}{4}\pi \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi < x \le \frac{7}{4}\pi$$

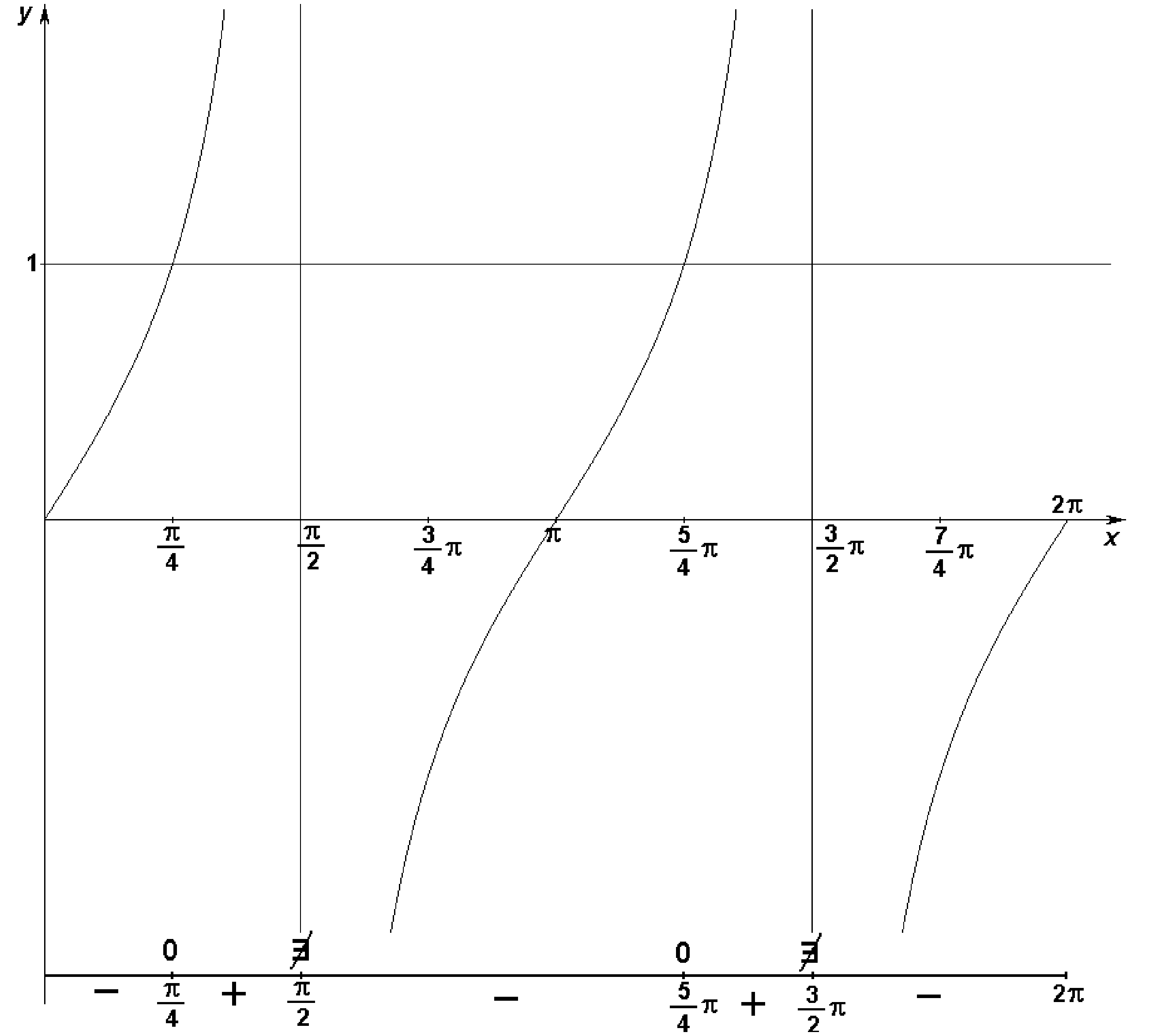

Figura 3

6) Risolviamo separatamente le due disequazioni: $2\cos x + 1 \le 0$ e $3tgx + \sqrt{3} > 0$.

Per la prima si ha $\cos x \le -\frac{1}{2}$ che nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ risulta soddisfatta per $\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi$ (vedi figura 4).

Per la seconda si ha $tgx > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ che nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ risulta soddisfatta per $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ e $\frac{11}{6}\pi < x \le 2\pi$ (vedi figura 5).

Mettendo insieme i due grafici, andando quindi a trovare le soluzioni comuni, si vede facilmente che il sistema è soddisfatto per:

$$\frac{5}{6}\pi < x \le \frac{4}{3}\pi$$

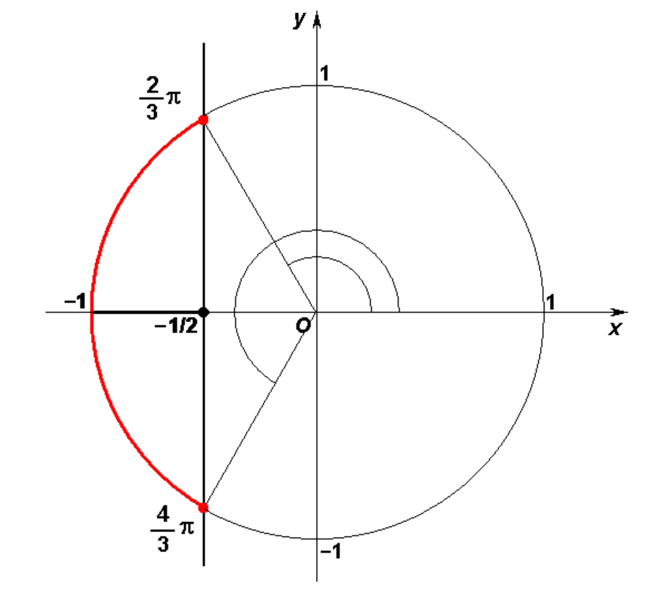

Figura 4

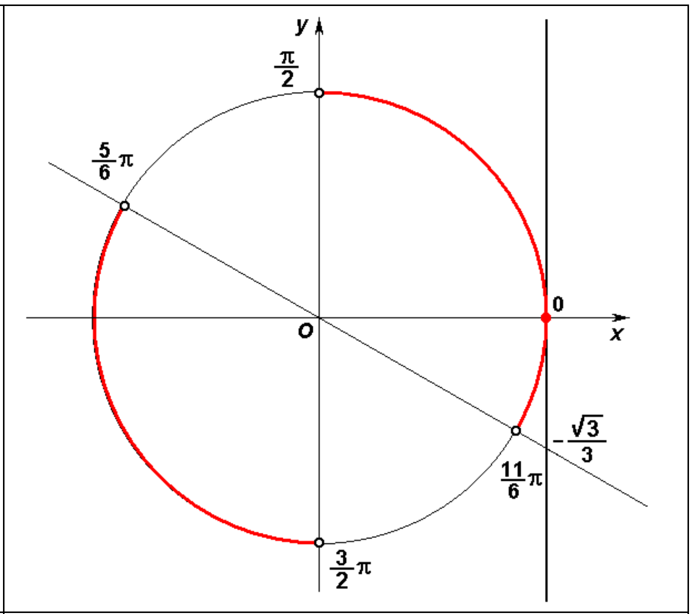

Figura 5

7) Nell'equazione $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+2-k=0$ poniamo $\cos x=t$. Otteniamo $2t^2-\sqrt{3}t+2-k=0$ con le limitazioni $-\frac{1}{2}\le t<1$.

Posto ancora $y=2t^2-\sqrt{3}t$ [1] otteniamo il sistema misto $\begin{cases} y=2t^2-\sqrt{3}t \\ y=k-2 \\ -\frac{1}{2}\le t<1 \end{cases}$

La prima equazione, in un piano cartesiano rappresenta una parabola che passa per l'origine, ha la concavità rivolta verso l'alto, vertice nel punto $V\left(\frac{\sqrt{3}}{4};-\frac{3}{8}\right)$; la seconda è l'equazione di un fascio

---

[1] Si potevano fare altre scelte, per esempio, porre $y=t^2$, in questo caso si otteneva il sistema misto $\begin{cases} y=t^2 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t-1+\frac{k}{2} \\ -\frac{1}{2}\le t<1 \end{cases}$

La seconda equazione è un fascio di rette parallele, ma inclinate di un angolo di circa 41° (si ricordi che il coefficiente angolare della retta è la tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse: nel nostro caso $m=\frac{\sqrt{3}}{2}=tg\left(40{,}89°\right)$. Le rette caposaldo sono: quella che passa per $A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $B(1;1)$ e la retta tangente alla parabola. Ovviamente si ottengono gli stessi valori.

Un'altra possibilità è quella di porre $y=2t^2-\sqrt{3}t+2$, in questo caso si otteneva il sistema misto $\begin{cases} y=y=2t^2-\sqrt{3}t+2 \\ y=k \\ -\frac{1}{2}\le t<1 \end{cases}$. Il procedimento risolutivo è analogo a quello spiegato nel testo con la differenza che tutti i grafici sono traslati verso l'alto di 2 unità.

di rette parallele all'asse delle ascisse e la terza induce delle limitazioni per la t e quindi definisce un arco di parabola di estremi $A\left(-\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ e $B\left(1;2-\sqrt{3}\right)$; l'estremo B è escluso (vedi figura 6).

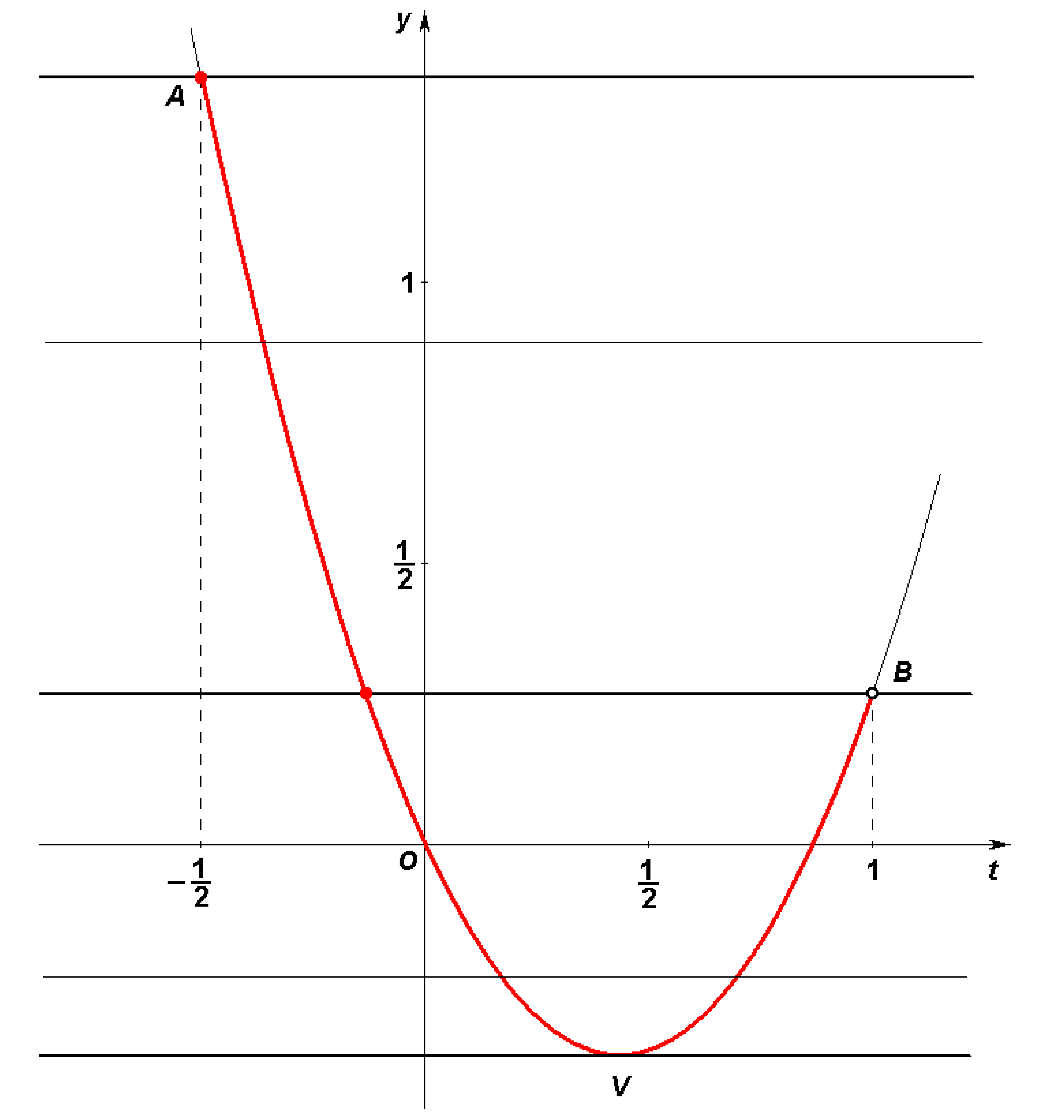

Figura 6

Risolvere il quesito significa trovare i valori di k per cui le rette del fascio intersecano l'arco $\overset{\frown}{AB}$.
Individuiamo le rette caposaldo, ossia quelle che passano per V, per A e per B.

Per V si ha: $-\frac{3}{8}=k-2 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{13}{8}$.

Per A si ha: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}=k-2 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

Per B si ha: $2-\sqrt{3}=k-2 \quad \Rightarrow \quad k=4-\sqrt{3}$.

Come si deduce anche dal grafico si ha:

2 soluzioni per $\frac{13}{8} \le k < 4-\sqrt{3}$

1 soluzione per $4-\sqrt{3} \le k \le \frac{5+\sqrt{3}}{2}$

8) Poniamo $cos\,x = X$ e $senx = Y$. Tenendo conto delle limitazioni risulta $0 \le X \le 1$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le Y \le 1$. Ricordando che dalla prima relazione fondamentale della goniometria di ha $X^2+Y^2=1$, la soluzione del problema è legata alla soluzione del sistema misto

$$\begin{cases} \sqrt{3}X+3Y-3k=0 \\ X^2+Y^2=1 \\ 0 \le X \le 1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \le Y \le 1 \end{cases}$$

In altre parole si tratta di studiare, nel piano *XOY*, le intersezioni tra il fascio di rette parallele $Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+k$ e l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 1 compreso tra *A* e *B* per cui $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Per la definizione di coseno e di seno, si ha: $A\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right);sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, ossia $A\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $B\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right);sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, ossia $B(0;1)$. Il fascio di rette forma un angolo di $\frac{5}{6}\pi$ con il semiasse positivo delle ascisse.

Le rette caposaldo sono: quella che passa per *A*, quella che passa per *B* e quella tangente alla circonferenza il cui punto di tangenza sta nel primo quadrante, e quindi quella che interseca il semiasse positivo delle ordinate.

Per *A* si ha: $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3k=0 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Per *B* si ha: $3-3k=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$.

Per la retta tangente risulta $\frac{|-3k|}{\sqrt{3+9}}=1 \quad \Rightarrow \quad k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, la soluzione negative deve essere scartata perché la retta corrispondente interseca il semiasse negativo delle ordinate e non quello positivo.

In modo alternativo si può osservare che e il punto *C* di tangenza nel primo quadrante lo otteniamo dall'intersezione della retta perpendicolare al fascio passante per l'origine e la circonferenza. La retta perpendicolare al fascio ha coefficiente angolare $m=\sqrt{3}$ e quindi forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il semiasse positivo delle ascisse. Il punto di tangenza ha quindi coordinate $C\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right);sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, ossia $C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (*C* è il simmetrico di *A* rispetto all'asse delle ascisse).

Per la retta del fascio che passa per C si ha: $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3k=0 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Come si deduce anche dal grafico in figura 7 si ha quindi:

1 soluzione per $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le k<1$

2 soluzioni per $1\le k\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

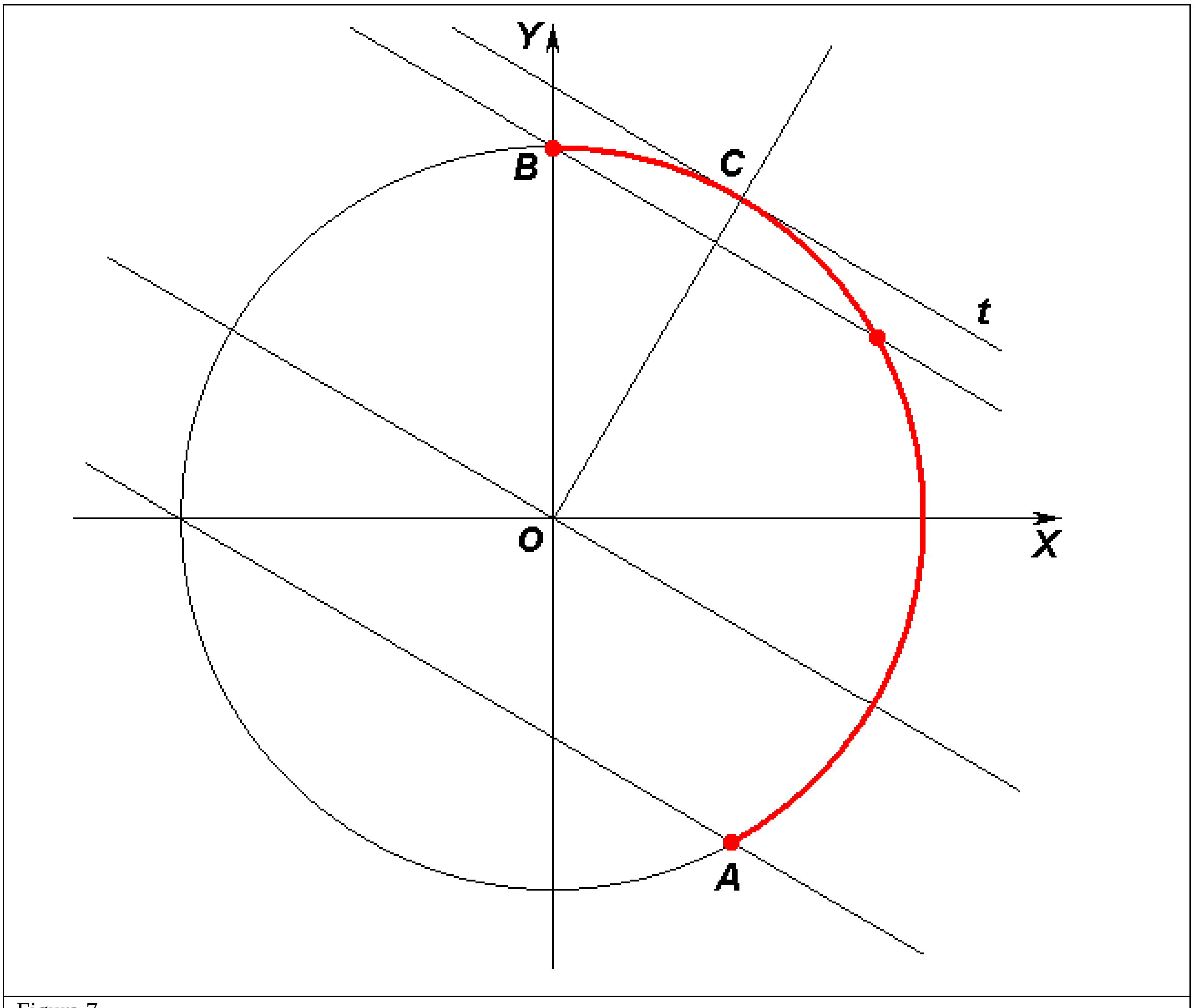

Figura 7