Macerata 6 ottobre 2015 – classe 4M – COMPITO DI MATEMATICA

SOLUZIONE FILA 1

Considerando α nel primo quadrante

1) Trasformare in *seno* e calcolare il valore della seguente espressione

$$\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{cosec\alpha}-\frac{1}{sec\,\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{sena}{\sqrt{1-sen^2\alpha}}\right)^2}+sen\alpha-\sqrt{1-sen^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{sen^2\alpha}{1-sen^2\alpha}}+sen\alpha-\sqrt{1-sen^2\alpha}==\frac{1}{\frac{1\cancel{-sen^2\alpha}\;\cancel{+sen^2\alpha}}{1-sen^2\alpha}}+sen\alpha-\sqrt{1-sen^2\alpha}=$$

$$=1-sen^2\alpha+sen\alpha-\sqrt{1-sen^2\alpha}=1-sen^2\alpha+sen\alpha-\sqrt{1-sen^2\alpha}$$

2) Trasformare in *coseno* e calcolare il valore della seguente espressione

$$\frac{1}{cos\,\alpha\left(1+tg^2\alpha\right)}+\frac{1}{cosec\alpha}-cos\,\alpha\cdot tg\alpha=$$

$$=\frac{1}{cos\,\alpha\left(1+\frac{1-cos^2\alpha}{cos^2\alpha}\right)}+\sqrt{1-cos^2\alpha}-\cancel{cos}\alpha\cdot\frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{\cancel{cos}\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{cos}\alpha\,\frac{\cancel{cos^2}\alpha+1\cancel{-cos^2}\alpha}{cos^{\cancel{2}}\alpha}}+\sqrt{1-cos^2\alpha}-\cancel{cos}\alpha\cdot\frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{\cancel{cos}\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{cos\,\alpha}}+\cancel{\sqrt{1-cos^2\alpha}}-\cancel{\sqrt{1-cos^2\alpha}}=cos\,\alpha$$

3) Calcolare il valore della seguente espressione ed esprimere il risultato in *tangente*

$$\frac{sec\,\alpha\left(1-cos^2\alpha\right)}{sen\alpha}+\frac{cos^2\alpha-cos^4\alpha}{1-sen^2\alpha}-sen^2\alpha=$$

$$=\frac{sen^{\cancel{2}}\alpha}{cos\,\alpha\cdot\cancel{sen}\alpha}+\frac{\cancel{cos^2}\alpha\left(1-cos^2\alpha\right)}{\cancel{cos^2}\alpha}-sen^2\alpha=$$

$$=\frac{sen\alpha}{cos\,\alpha}\cancel{+sen^2\alpha}\cancel{-sen^2\alpha}=tg\alpha$$

4) Calcola il valore della seguente espressione

$$\pi-\left[4arctg\,(-1)+2arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\pi-\left[4\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{\pi}{6}=\pi-\left[-\pi-\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{6+9+1}{6}\pi=\frac{8}{3}\pi$$

5) Calcola il valore della seguente espressione

$$\left(cotg\frac{\pi}{6}+tg\frac{7}{6}\pi\right)\cdot\left(tg\frac{\pi}{3}-cotg\frac{\pi}{3}\right)+sen\frac{11}{6}\pi+cos\frac{4}{3}\pi=$$

$$=\left(\frac{1}{tg\frac{\pi}{6}}+tg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(tg\frac{\pi}{3}-\frac{1}{tg\frac{\pi}{3}}\right)+sen\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{tg\frac{\pi}{6}}+tg\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(tg\frac{\pi}{3}-\frac{1}{tg\frac{\pi}{3}}\right)-sen\frac{\pi}{6}-cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-1=3-\frac{1}{3}-1=\frac{5}{3}$$

6) Utilizzando le formule di addizione e sottrazione verifica la seguente uguaglianza

$$\frac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)}=tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\frac{cos\,\alpha\,cos\,\beta\cancel{-sen\alpha sen\beta}+cos\,\alpha\,cos\,\beta\cancel{+sen\alpha sen\beta}}{sen\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha sen\beta-(sen\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha sen\beta)}=\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$\frac{2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta}{\cancel{sen\alpha\,cos\,\beta}+cos\,\alpha sen\beta\cancel{-sen\alpha\,cos\,\beta}+cos\,\alpha sen\beta}=\frac{cos\,\alpha}{sen\alpha}$$

$$\frac{\cancel{2cos\,\alpha}\,cos\,\beta}{\cancel{2cos\,\alpha}\,sen\beta}=\frac{cos\,\alpha}{sen\alpha}$$

L’uguaglianza non è verificata.

7) Trasforma la seguente equazione con il metodo dell’angolo aggiunto e stabilisci quale è il suo grafico, nell’intervallo $0\le x\le 2\pi$ tra i quattro indicati.

$y=2\sqrt{3}sen4x-2\,cos\,4x+1$

Cerchiamo la soluzione nella forma $y=Asen(4x+\varphi)+1$.

Utilizzando le formule di addizione per il seno si ha:

$y=Asen(4x)cos\,\varphi+A\,cos(4x)sen\varphi+1$

confrontando con il testo deve essere $\begin{cases}A\,cos\,\varphi=2\sqrt{3}\\ Asen\varphi=-2\end{cases}$ elevando al quadrato e sommando membro a membro si ha $A^2\left(cos^2\varphi+sen^2\varphi\right)=A^2=4\cdot 3+4=16$ da cui $A=4$.

Si ha quindi $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\varphi = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Siamo quindi nel quarto quadrante e $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$. L’espressione cercata è quindi $y = 4sen\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$. Il grafico è una sinusoide che fa 4 oscillazioni con $0 \le x \le 2\pi$ e ciò consente di scartare la B e la C. Inoltre la sinusoide $y = 4sen\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ ha massimo uguale a 4 e minimo uguale a -4. La nostra funzione, rispetto ad essa è traslata verso l’alto di una unità, quindi ha un massimo uguale a 5 e un minimo uguale a –3. Da ciò segue che il grafico della funzione data è D.

SOLUZIONE FILA 2

Gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5, sono identici a quelli della fila 1, c’è solo una commutazione di termini.

6) Utilizzando le formule di addizione e sottrazione verifica la seguente uguaglianza

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)} = cotg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta} - sen\alpha sen\beta \cancel{- \cos\alpha\cos\beta} - sen\alpha sen\beta}{sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta - (sen\alpha\cos\beta - \cos\alpha sen\beta)} = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$\frac{-2sen\alpha sen\beta}{\cancel{sen\alpha\cos\beta} + \cos\alpha sen\beta \cancel{- sen\alpha\cos\beta} + \cos\alpha sen\beta} = -\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{-\cancel{2}\, sen\alpha\, \cancel{sen\beta}}{\cancel{2}\, \cos\alpha\, \cancel{sen\beta}} = -\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Il quesito 7 è identico a quello della fila 1, è solamente scambiato l’ordine dei grafici (A con B e C con D) il grafico corretto è C.