Macerata 1 dicembre 2014 – classe 3M – TEST DI MATEMATICA – RECUPERO ASSENTI

SOLUZIONE

1) Scrivendo SI o NO nella casella vuota stabilisci se le equazioni indicate rappresentano delle funzioni $f : x \in A \rightarrow y \in B$?

a	$4x^2 - 2x - y = 0$	SI
b	$y^2 - 4x = 0$	NO
c	$xy - 2x^4 + 6 = 0$	SI
d	$y = \sqrt{x^2 - 4}$	SI

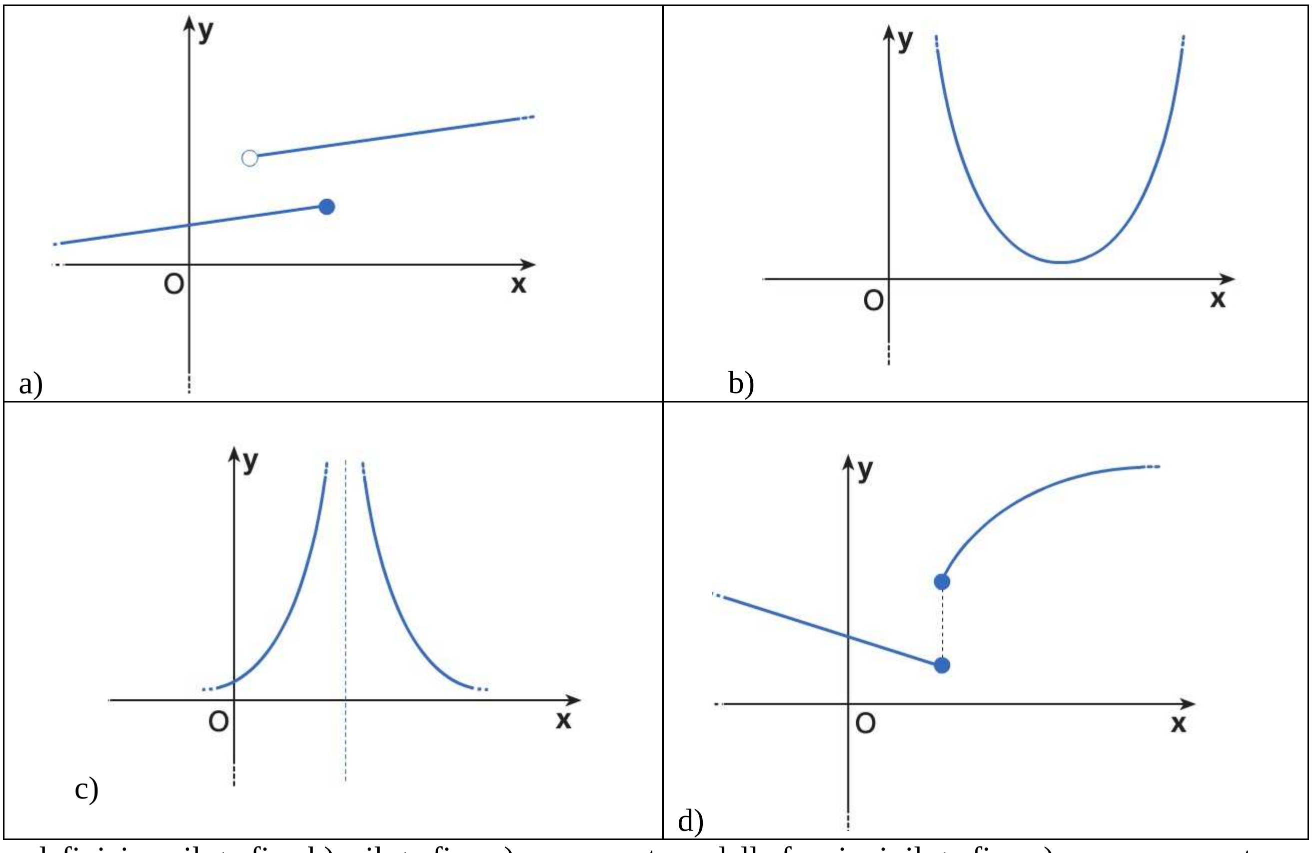
È l'esercizio del libro pag. 110 n. 7 modificato

Una funzione è tale se ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde uno e un sol elemento $y \in B$. La a) è una funzione che può essere scritta nella forma $y = 4x^2 - 2x$. La b) non è una funzione in quanto risulta $y = \pm 2\sqrt{x}$ e quindi ad ogni $x \neq 0$ corrispondono due valori di *y*. La c) si può scrivere nella forma $y = \dfrac{2x^4 - 6}{x}$ e quindi è una funzione anche se non è definita per $x = 0$. La d) è una funzione definita per $x \leq -2$ e $x \geq 2$.

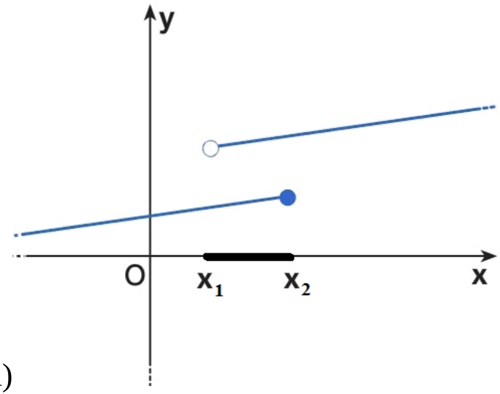
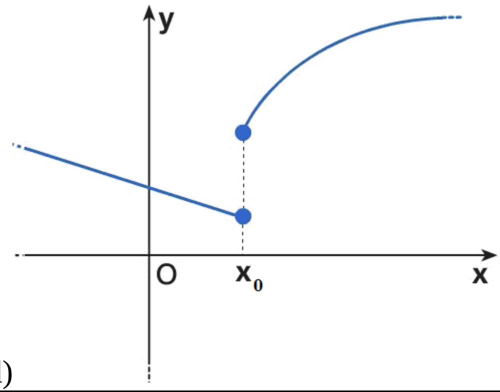
2) Scrivendo SI o NO nella casella vuota indica quali di questi grafici rappresentano una funzione?

a	NO
b	SI
c	SI
d	NO

Sono gli esercizi del libro pag. 111 n. 12 e 13



Per definizione il grafico b) e il grafico c) rappresentano delle funzioni; il grafico a) non rappresenta una funzione perché per $x_1 < x \leq x_2$ ci sono due valori di *y*; il grafico d) non rappresenta una funzione perché per $x = x_0$ ci sono due valori di *y*.

 a)	 d)

3) Data la funzione $f(x)=\begin{cases}-x & \text{se } |x|<1 \\ 2x+1 & \text{se } |x|\geq 2\end{cases}$

a) calcola:

$f(-2)=$-3	$f(0)=0$	$f(1)=$non esiste	$f(3)=7$

b) trova il/i valori di x per i quali si ha:

$f(x)=-\frac{1}{2}$ $\quad x=\frac{1}{2}$	$f(x)=7$ $\quad x=3$

c) indica gli intervalli in cui la funzione non è definita

$-2<x\leq -1$ e $1\leq x<2$.

È l'esercizio del libro pag. 113 n. 45 modificato

È una funzione definita per casi che può essere scritta nella forma

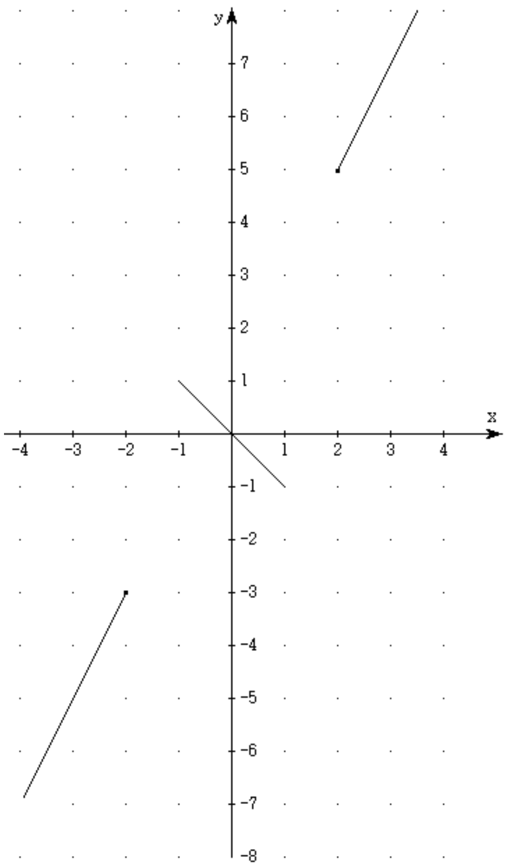
$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se } x\leq -2 \\ -x & \text{se } -1<x<1 \\ 2x+1 & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

a) Per $x=-2$ la funzione è definita come $f(x)=2x+1$ e quindi $f(-2)=-3$.

Per $x=0$ la funzione è definita come $f(x)=-x$ e quindi $f(0)=0$.

Per $x=1$ la funzione non è definita.

Per $x=3$ la funzione è definita come $f(x)=2x+1$ e quindi $f(3)=7$.



b) $f(x) = -\frac{1}{2}$ significa che si devono risolvere i sistemi $\begin{cases} |x| < 1 \\ -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ 2x+1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Il primo è soddisfatto per $x = \frac{1}{2}$ il secondo non è soddisfatto. La soluzione è quindi $x = \frac{1}{2}$. Analogamente $f(x) = 7$ significa che si devono risolvere i sistemi $\begin{cases} |x| < 1 \\ -x = 7 \end{cases}$ e $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ 2x+1 = 7 \end{cases}$. Questa volta è il primo sistema a non essere soddisfatto, mentre per il secondo si ha: $x = 3$. La soluzione è quindi $x = 3$.

c) La funzione è definita per $|x| < 1$ e $|x| \geq 2$, e quindi per $x \leq -2$, $-1 < x < 1$, $x \geq 2$. NON e pertanto definita per $-2 < x \leq -1$ e $1 \leq x < 2$.

Nella figura, il grafico della funzione aiuta a rispondere ai quesiti.

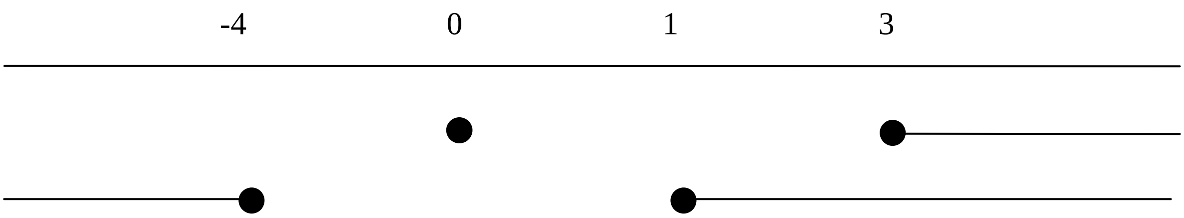
4) Determina il dominio naturale della funzione $y = \sqrt{x^3 - 3x^2} + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

È l'esercizio del libro pag. 115 n. 83 leggermente modificato

Bisogna risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$

Risolviamo la prima disequazione: $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) \geq 0$ è soddisfatta per $x = 0$ e $x \geq 3$. La seconda, $x^2 + 3x - 4 \geq 0$, è una disequazione razionale intera di secondo grado. Il coefficiente di x^2 è uguale a 1 e quindi positivo; le radici sono $x = -4$ e $x = 1$ per cui la soluzione è: $x \leq -4$ e $x \geq 1$.

La soluzione del sistema si ricava dal grafico:



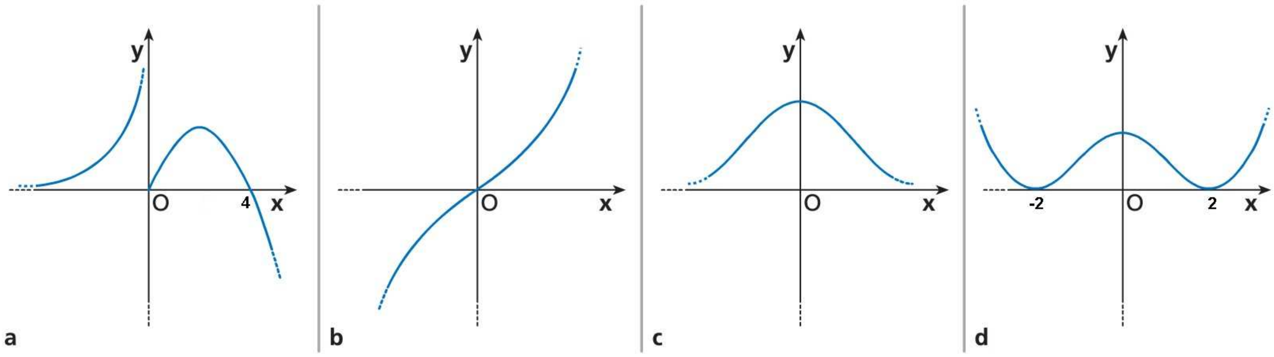
La soluzione è $x \geq 3$.

5) Indica con una X le affermazioni vere (V) e quelle false (F).

a)	La funzione $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$ ha come zeri 0, 1, 4.	V	**X**
b)	La funzione $y = \frac{2x^2 + 1}{x+1}$ non ha zeri.	**X**	F
c)	La funzione $y = \frac{x^2 - 4}{x+2}$ non ha zeri.	V	**X**
d)	La funzione $y = \frac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{1-x}$ ha come zeri 0, 2, 4.	**X**	F

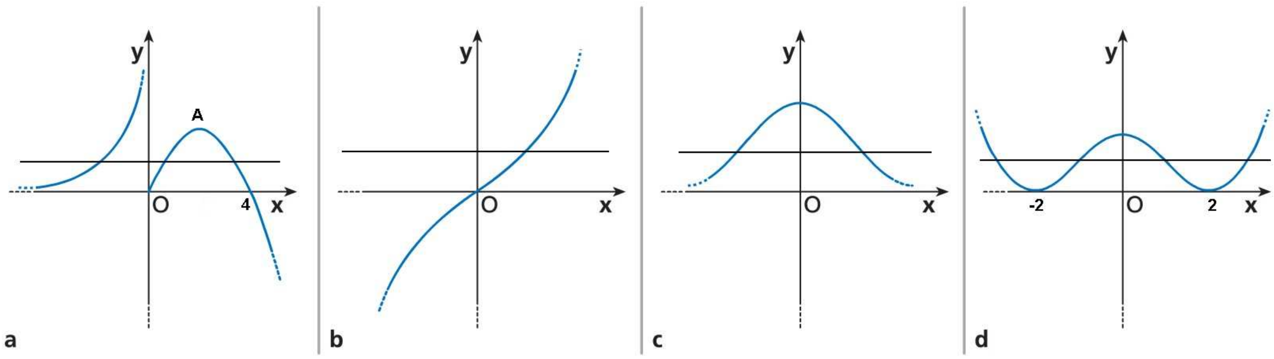
a) FALSO - per $x=0$ la funzione non esiste (si annulla il denominatore). b) VERO - $y=\frac{2x^2+1}{x+1}=0$ se $2x^2+1=0$ che essendo la somma di due quadrati non è mai zero. c) FALSO – come sopra $x^2-4=0$ ossia $x=\pm 2$. Attenzione che per $x=-2$ si annulla anche il denominatore, quindi la funzione non è determinata. d) VERO – basta sostituire.

6) Indica quale dei seguenti grafici rappresenta una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per ogni funzione indica se è una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Scrivi l'intervallo in cui la funzione è positiva.



	Scrivi SI o NO				Intervallo in cui la funzione è positiva
	È una finzione?	È iniettiva?	È suriettiva?	È biiettiva	
a	SI	NO	SI	NO	$x<0$ e $0<x<4$
b	SI	SI	SI	SI	$x>0$
c	SI	NO	NO	NO	$\forall x\in\mathbb{R}$
d	SI	NO	NO	NO	$\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm 2$

È l'esercizio del libro pag. 121 n. 170 leggermente modificato



Sono tutte delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Le funzioni a) e b) hanno come codominio $\mathbb{R}$, mentre c) un sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ e d) ha codominio $y\geq 0$.
Ricordiamo le definizioni
Una funzione da A a B si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A.
Una funzione da A a B si dice suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.
Una funzione da A a B è biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva.
a) Non è iniettiva perché una retta che passa tra l'asse x e A interseca la funzione in tre punti, però è suriettiva. Non essendo suriettiva, non è biiettiva.

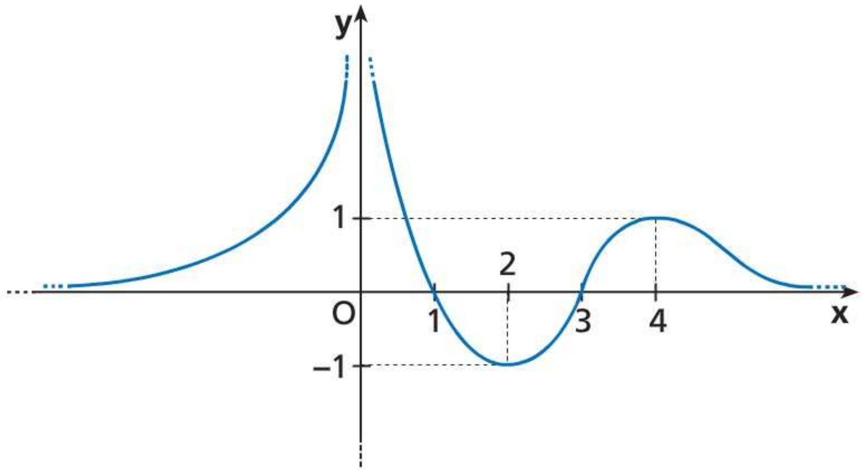
b) è una funzione, è iniettiva perché ogni elemento di B è immagine di un solo elemento di A (ogni retta parallela all'asse *x* incontra il grafico della funzione al più in un punto), è suriettiva in quanto ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A (per la verità di uno solo). Essendo iniettiva e suriettiva è anche biiettiva.

c) è una funzione, è non iniettiva perché ci sono elementi di B che sono immagine di due elementi di A (in questo caso ci sono delle rette parallele all'asse *x* che incontrano il grafico della funzione in due punti), non è suriettiva in quanto il codominio non coincide con $\mathbb{R}$ e quindi ci sono dei valori cui non corrisponde alcun valore di x. Essendo né iniettiva né suriettiva non può essere biiettiva.

d) la funzione non è iniettiva in quanto ad ogni $y \geq 0$ corrispondono 2 o 4 valori di x. Non è suriettiva perché il codominio è $y \geq 0$, quindi non può essere biiettiva

Gli intervalli in cui le funzioni sono positive si deducono facilmente dai grafici.

7) Completa utilizzando i dati del grafico



A	il dominio è $x<0$, $x>0$	
B	il codominio è $y \geq -1$	
C	$f(1)=$ 0	$f(2)=$ -1
D	$f(x)=-1$ per x = 2	$f(x)=0$ per x = 1 e x = 3
E	la funzione è crescente negli intervalli $x<0$, $2<x<4$ è decrescente in $0<x<2$ e $x>4$	
F	$f(x)<0$ per $1<x<3$	

È l'esercizio del libro pag. 123 n. 193 leggermente modificato

8)

Definisci quando una funzione $y=f(x)$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è

Pari: una funzione si dice pari in $\mathbb{R}$ se, $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $f(-x)=f(x)$

Dispari: una funzione si dice pari in $\mathbb{R}$ se, $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $f(-x)=-f(x)$

Indica con una X quali di queste funzioni sono pari, quali dispari, quali né pari né dispari.

a) esercizio pag. 123 n. 196 b) pag. 123 n. 198 c) pag 124 n. 203 mod. d) pag. 124 n. 199

		Pari	Dispari	Né pari né dispari
a	$y=-\lvert x\rvert+\frac{x^2}{3}$	X		
b	$y=\frac{\lvert x-5\rvert}{x^3}$			X
c	$y=\frac{x^4-4x^2}{2x^3}$		X	
d	$y=-2x\lvert x\rvert+1$			X

Dalle definizioni si ha:

a) $f(-x)=-\lvert -x\rvert+\frac{(-x)^2}{3}=-\lvert x\rvert+\frac{x^2}{3}=f(x)$ pari

b) $f(-x)=\frac{\lvert -x-5\rvert}{(-x)^3}=\frac{\lvert -x-5\rvert}{-x^3}=-\frac{\lvert -x-5\rvert}{x^3}$ né pari né dispari

c) $f(-x)=\frac{(-x)^4-4(-x)^2}{2(-x)^3}=\frac{x^4-4x^2}{-2x^3}=-\frac{x^4-4x^2}{2x^3}=-f(x)$, dispari

d) $f(-x)=-2(-x)\lvert -x\rvert+1=2x\lvert x\rvert+1$ né pari né dispari

9) Data la funzione $f(x)=\frac{5x-3}{2}$, trova $f^{-1}(x)$ e calcola $f^{-1}(2)$

$f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{5}$	$f^{-1}(2)=\frac{2\cdot 2+3}{5}=\frac{7}{5}$

È l'esercizio del libro pag. 124 n. 207 modificata

Posto $y=\frac{5x-3}{2}$ ricaviamo la *x*. Si ricava $x=\frac{2y+3}{5}$

10) Date le funzioni: $f(x)=\sqrt{x-1}$ e $g(x)=x^2-1$ determinarne il dominio e il codominio e quindi $f\circ g$ e $g\circ f$

È l'esercizio del libro pag. 127 n. 230 leggermente modificato (quello del libro fatto in classe)

Dominio $f(x)$ =	$x\ge 1$	Dominio $g(x)$ =	$\mathbb{R}$
Codominio $f(x)$ =	$y\ge 0$	Codominio $g(x)$ =	$y\ge -1$
$f\circ g$ =	$\sqrt{x^2-2}$	$g\circ f$ =	$x-2$

$$f\circ g=f\left[g(x)\right]=\sqrt{(x^2-1)-1}=\sqrt{x^2-2} \qquad g\circ f=g\left[f(x)\right]=\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1=x-2$$