

SOLUZIONE

1) Scrivendo SI o NO nella casella vuota stabilisci se le equazioni indicate rappresentano delle funzioni $f : x \in A \rightarrow y \in B$?

a	$4x - 2y = 3$	SI
b	$x^2 - 4y = 0$	SI
c	$x - y^2 = 1$	NO
d	$y = \sqrt{x^2 - 1}$	SI

È l'esercizio del libro pag. 110 n. 7

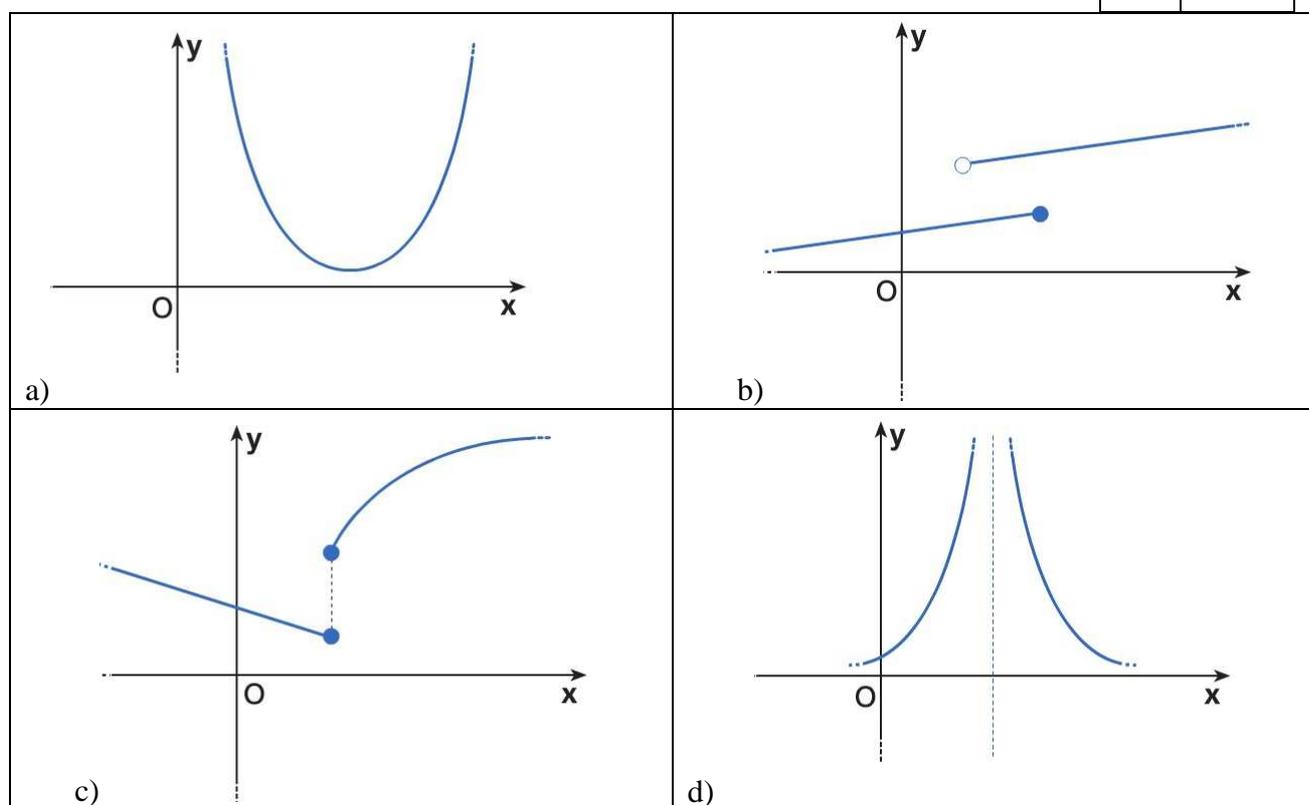
Una funzione è tale se ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde uno e un sol elemento $y \in B$. La a) può essere scritta nella forma $y = \frac{4x-3}{2}$,

la b) $y = \frac{x^2}{4}$ e quindi ad ogni $x \in \mathbb{R}$ corrisponde un sol valore di y . La stessa cosa succede per la d) dove però bisogna tener conto che la funzione è definita solo per $x \leq -1$ e $x \geq 1$. Per la c) invece risulta $y = \pm\sqrt{x-1}$ e quindi ad ogni $x \geq 1$ corrispondono due valori di y .

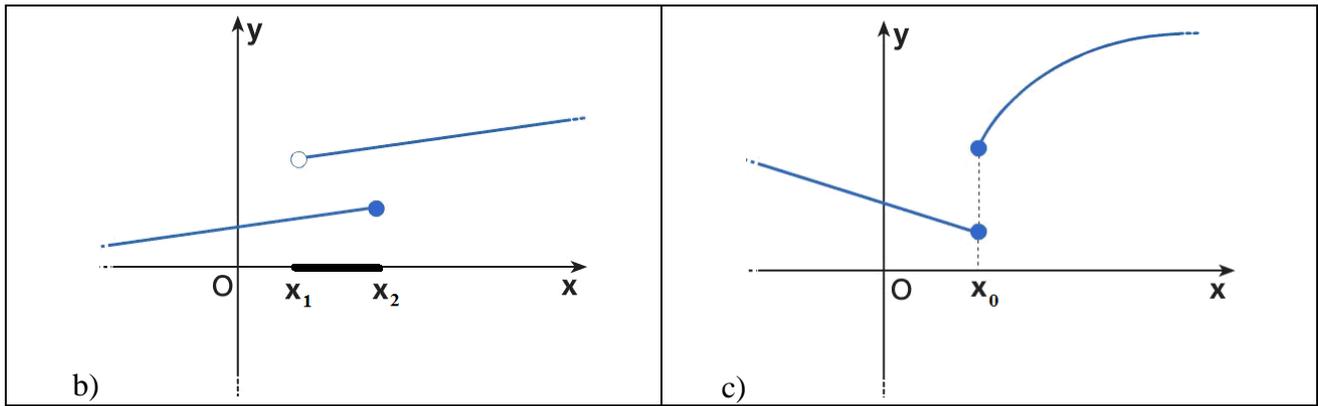
2) Scrivendo SI o NO nella casella vuota indica quali di questi grafici rappresentano una funzione?

a	SI
b	NO
c	NO
d	SI

Sono gli esercizi del libro pag. 111 n. 12 e 13



Per definizione il grafico a) e il grafico d) rappresentano delle funzioni; il grafico b) non rappresenta una funzione perché per $x_1 < x \leq x_2$ ci sono due valori di y ; il grafico c) non rappresenta una funzione perché per $x = x_0$ ci sono due valori di y .



3) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| < 1 \\ -2x+1 & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases}$

a) calcola:

$f(-2) = 5$	$f(0) = 0$	$f(1) = \text{non esiste}$	$f(3) = -5$
-------------	------------	----------------------------	-------------

b) trova il/i valori di x per i quali si ha:

$f(x) = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$f(x) = 7$	$x = -3$
-----------------------	--------------------	------------	----------

c) indica gli intervalli in cui la funzione non è definita

$-2 < x \leq -1$ e $1 \leq x < 2$.

È l'esercizio del libro pag. 113 n. 45

È una funzione definita per casi che può essere scritta nella forma

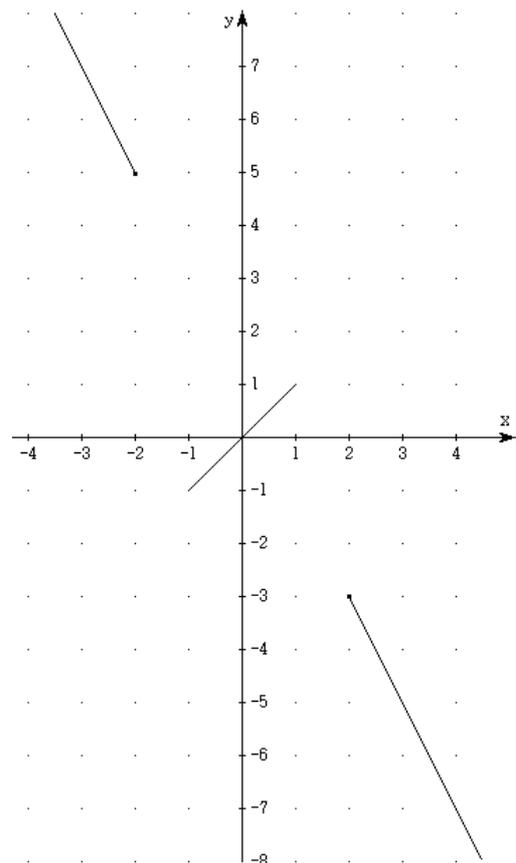
$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x \leq -2 \\ x & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2x+1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Per $x = -2$ la funzione è definita come $f(x) = -2x+1$ e quindi $f(-2) = 5$.

Per $x = 0$ la funzione è definita come $f(x) = x$ e quindi $f(0) = 0$.

Per $x = 1$ la funzione non è definita.

Per $x = 3$ la funzione è definita come $f(x) = -2x+1$ e quindi $f(3) = -5$.



b) $f(x) = -\frac{1}{2}$ significa che si devono risolvere i sistemi $\begin{cases} |x| < 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ -2x+1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Il primo è soddisfatto per $x = -\frac{1}{2}$ il secondo non è soddisfatto. La soluzione è quindi $x = -\frac{1}{2}$. Analogamente

$f(x) = 7$ significa che si devono risolvere i sistemi $\begin{cases} |x| < 1 \\ x = 7 \end{cases}$ e $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ -2x+1 = 7 \end{cases}$. Questa volta è il primo sistema a non essere soddisfatto, mentre per il secondo si ha: $x = -3$. La soluzione è quindi $x = -3$.

c) La funzione è definita per $|x| < 1$ e $|x| \geq 2$, e quindi per $x \leq -2$, $-1 < x < 1$, $x \geq 2$. NON è pertanto definita per $-2 < x \leq -1$ e $1 \leq x < 2$.

Nella figura il grafico della funzione aiuta a rispondere ai quesiti.

4) Determina il dominio naturale della funzione $y = \sqrt{3x+2} + \sqrt{\frac{4x}{x^2+1}}$

È l'esercizio del libro pag. 115 n. 83 leggermente modificato

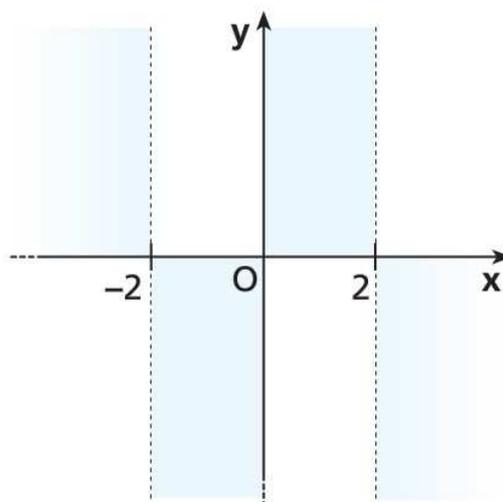
Bisogna risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ \frac{4x}{x^2+1} \geq 0 \end{cases}$

La prima disequazione è soddisfatta per $x \geq -\frac{2}{3}$. La seconda è una disequazione razionale fratta il cui denominatore è sempre maggiore di zero (è la somma di due quadrati). La frazione sarà quindi maggiore o uguale a zero quando il numeratore è maggiore o uguale a zero e quindi per $x \geq 0$. La soluzione del sistema è quindi $x \geq 0$.

5) Una sola delle seguenti funzioni ha il grafico che appartiene alle zone colorate della figura a fianco. Quale? Indicala con una X sopra la lettera.

a) $y = \frac{x}{x^2-4}$ b) $y = x\sqrt{x^2-4}$

c) $y = -2x^3 + 8x$ d) $y = 2x^3 - 8x$



È l'esercizio del libro pag. 117 n. 135 leggermente modificato

La funzione cercata deve essere uguale a zero per $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$, per cui la a) è da scartare in quanto si annulla solo per $x = 0$.

La b) è da scartare perché per $x > 0$ è sempre positiva ad eccezione di $x = 2$ per il quale valore si annulla.

Studiamo il segno della c), a tal fine risolviamo la disequazione: $-2x^3 + 8x > 0$;

$$-2x^3 + 8x = -2x(x^2 - 4) > 0$$

$$-2x > 0 \text{ per } x < 0$$

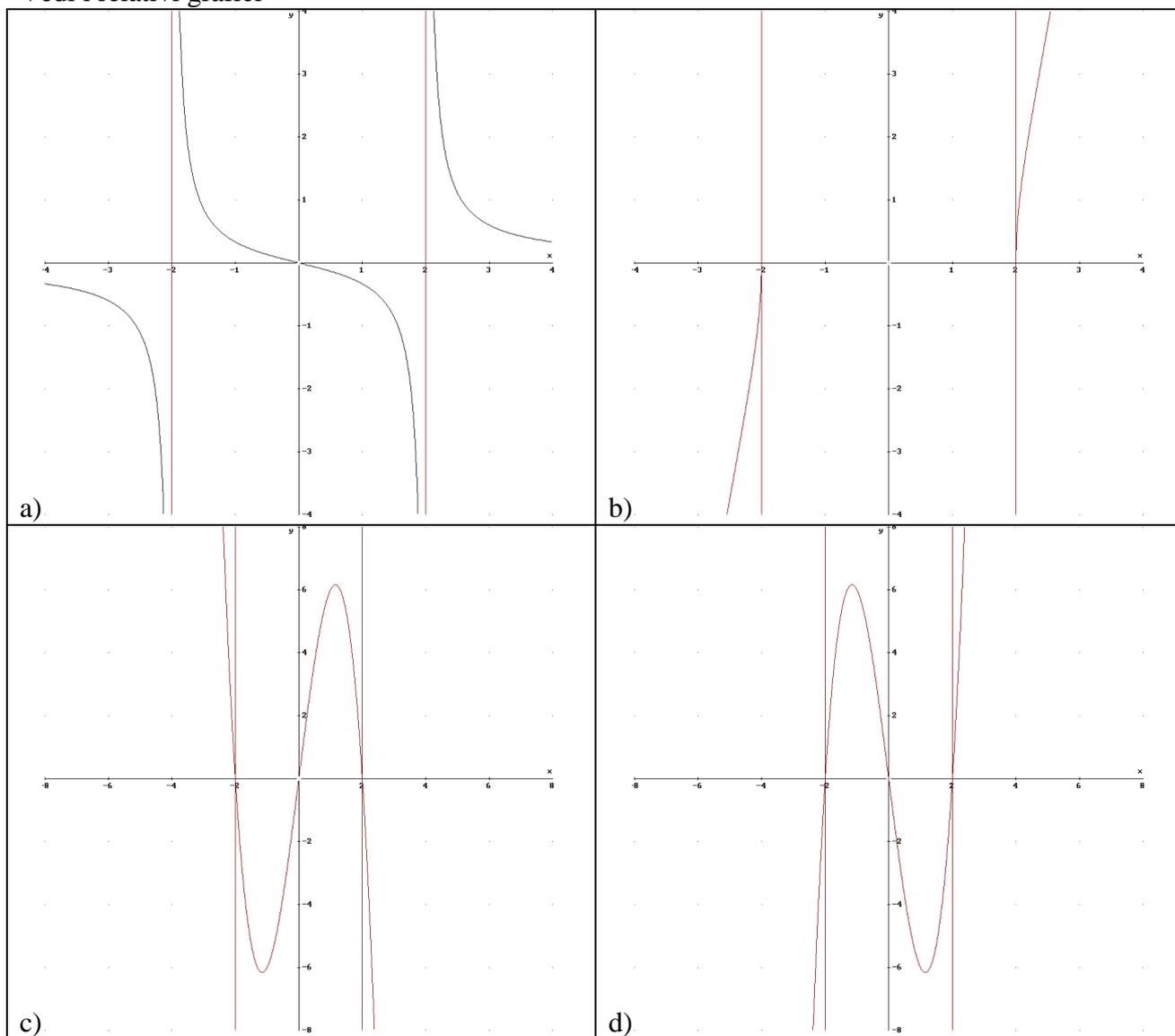
$$x^2 - 4 > 0 \text{ per } x < -2, x > 2.$$

Da quanto ricavato, è facile dedurre quando i fattori sono negativi o nulli. Riportando in diagramma:

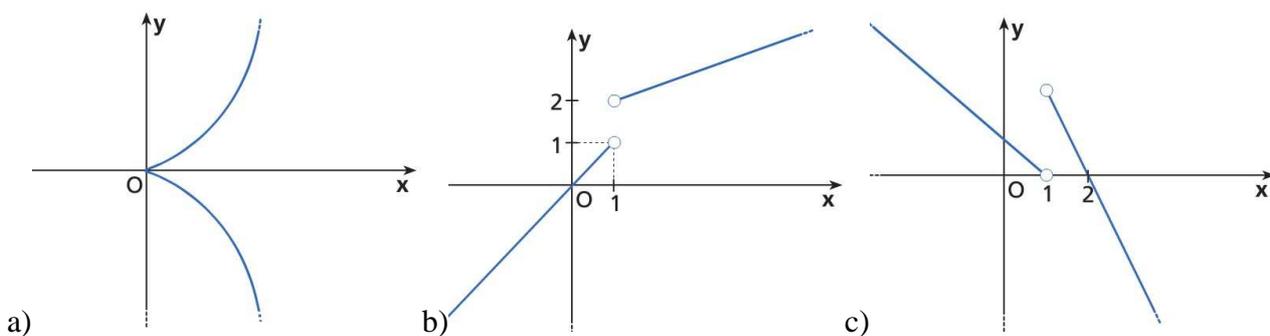
	-2	0	2	
$-2x$	+		+	-
$x^2 - 4$	+	0	-	
$-2x^3 + 8x$	+	0	-	0

Abbiamo che la funzione è positiva per $x < -2$ e per $0 < x < 2$, negativa per $-2 < x < 0$ e $x > 2$ e nulla per $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$. Ciò è proprio quello che viene rappresentato nella figura del testo. La risposta è quindi c). Si può osservare subito che la d) è la c) cambiata di segno e quindi il suo grafico appartiene alle zone bianche della figura.

Vedi i relativi grafici



6) Indica quale dei seguenti grafici rappresenta una funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} . Per ogni funzione indica se è una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Scrivi l'intervallo in cui la funzione è positiva.



	Scrivi SI o NO				Intervallo in cui la funzione è positiva
	È una funzione?	È iniettiva?	È suriettiva?	È biiettiva	
a	NO	NO	NO	NO	---
b	SI	SI	NO	NO	$0 < x < 1$ $x > 1$
c	SI	NO	SI	NO	$x < 1$ $1 < x < 2$

È l'esercizio del libro pag. 121 n. 170 leggermente modificato

Dal testo, A e B sono \mathbb{R} .

Ricordiamo le definizioni

Una funzione da A a B si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A.

Una funzione da A a B si dice suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

Una funzione da A a B è biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva.

a) non è una funzione perché ad ogni $x > 0$ corrispondono due valori di y . Non essendo una funzione non ha senso chiedersi se è iniettiva, suriettiva, biiettiva, o dove è positiva

b) è una funzione, è iniettiva, ma non è suriettiva in quanto gli elementi $1 < y < 2$ non sono immagine di nessun elemento di A. Non essendo iniettiva e suriettiva non è biiettiva.

c) è una funzione, è non iniettiva perché ci sono elementi di B che sono immagine di due elementi di A (in questo caso ci sono delle rette parallele all'asse x che incontrano il grafico della funzione in due punti), è suriettiva in quanto ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A. Essendo non iniettiva non può essere biiettiva.

Gli intervalli in cui le funzioni sono positive si deducono facilmente dai grafici.

7) Definisci quando una funzione è

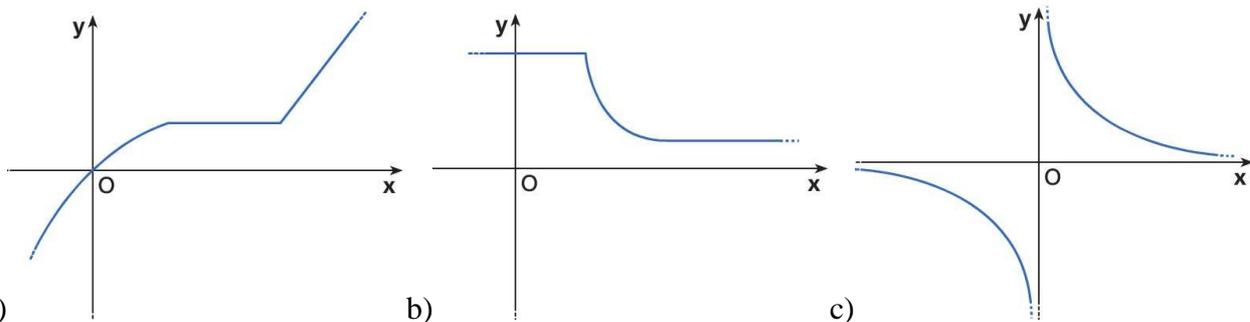
Crescente in senso stretto **Se**, $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$

Decrescente in senso stretto **Se**, $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$

Crescente in senso lato **Se**, $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$

Decrescente in senso lato **Se**, $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$

Indica per ognuna delle funzioni i cui grafici sono riportati qui sotto se è crescente o decrescente (in senso stretto o in senso lato) in \mathbb{R} .



	Scrivi SI o NO			
	Crescente in senso stretto?	Decrescente in senso stretto?	Crescente in senso lato?	Decrescente in senso lato?
A	NO	NO	SI	NO
B	NO	NO	NO	SI
C	NO	SI	NO	NO

È l'esercizio del libro pag. 123 n. 192 modificato

8) Quali di queste funzioni sono pari, quali dispari, quali né pari né dispari? (indica con una X)

a) esercizio pag. 123 n. 195 b) pag. 123 n. 197 c) pag 124 n. 201 d) pag. 124 n. 199

		Pari	Dispari	Né pari né dispari
a	$y = 2 x - x$			X
b	$y = -x^2 - 9$	X		
c	$y = \frac{\sqrt[3]{-x}}{2x^2 + 3}$		X	
d	$y = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}$		X	

Ricordiamo che una funzione è pari se $f(-x) = f(x)$, mentre è dispari se $f(-x) = -f(x)$. Si ha:

$$a) f(-x) = 2|-x| - (-x) = 2|x| + x$$

$$b) f(-x) = -(-x)^2 - 9 = -x^2 - 9$$

$$c) f(-x) = y = \frac{\sqrt[3]{-(-x)}}{2(-x)^2 + 3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2(x)^2 + 3}, \text{ si osservi che } y = \frac{\sqrt[3]{-x}}{2x^2 + 3} = \frac{-\sqrt[3]{x}}{2x^2 + 3} = -\frac{\sqrt[3]{x}}{2x^2 + 3}$$

$$d) f(-x) = \frac{\sqrt{1-4(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}$$

9) Data la funzione $f(x) = \frac{2x-4}{5}$, trova $f^{-1}(x)$ e calcola $f^{-1}(2)$

$f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{2}$	$f^{-1}(2) = \frac{5(2)+4}{2} = 7$
------------------------------	------------------------------------

È l'esercizio del libro pag. 124 n. 207

Posto $y = \frac{2x-4}{5}$ ricaviamo la x . Si ricava $x = \frac{5y+4}{2}$

10) Date le funzioni: $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 4$ determinarne il dominio e il codominio e quindi $f \circ g$ e $g \circ f$

È l'esercizio del libro pag. 127 n. 230 leggermente modificato (quello del libro fatto in classe)

Dominio $f(x) =$	\mathbb{R}^+	Dominio $g(x) =$	\mathbb{R}
Codominio $f(x) =$	\mathbb{R}^+	Codominio $g(x) =$	$y \geq -4$
$f \circ g =$	$\sqrt{x^2 - 4}$	$g \circ f =$	$x - 4$

$$f \circ g = f[g(x)] = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$g \circ f = g[f(x)] = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4$$