Macerata 5 maggio 2015 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA – RECUPERO ASSENTI

QUESITO 1

Considera il fascio di curve di equazione:

(1.1) $$\frac{x^2}{5k+2}-\frac{y^2}{k-6}=1$$

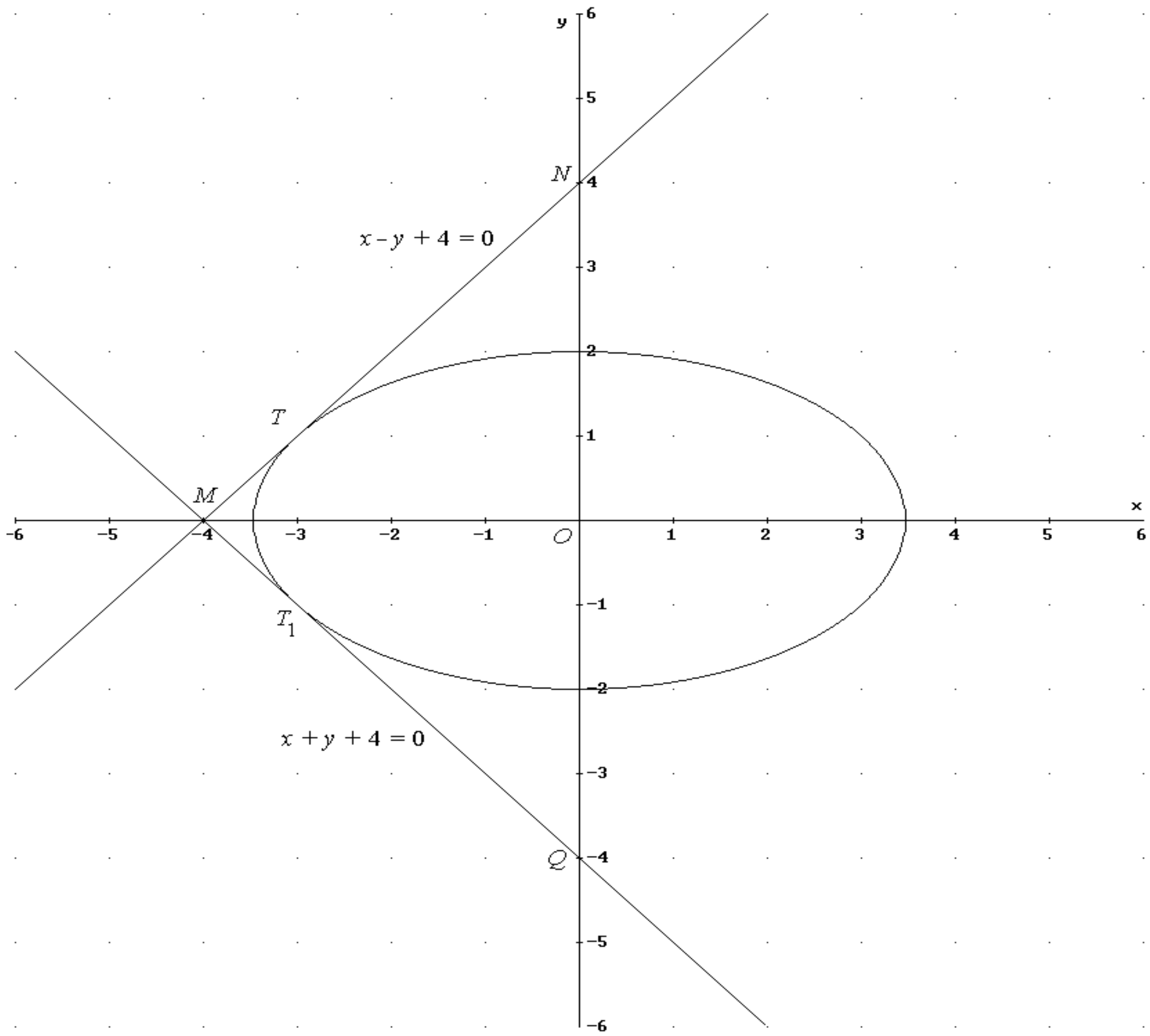
a) Trova per quali valori di k si hanno delle ellissi.

Deve essere $\begin{cases} 5k+2>0 \\ k-6<0 \end{cases}$, da cui segue: $-\frac{2}{5}<k<6$.

b) Per quali valori di k l'ellisse è una circonferenza? Per quale valore di k le ellissi hanno i fuochi sull'asse y?

L'ellisse è una circonferenza se i due semiassi sono uguali (a = b), quindi se $5k+2=-(k-6)$, da cui segue $k=\frac{2}{3}$. Affinché l'ellisse abbia i fuochi sull'asse delle y oltre a $-\frac{2}{5}<k<6$, il semiasse maggiore deve stare sull'asse y, quindi deve essere anche $a<b$: $5k+2<-(k-6)$ da cui segue $-\frac{2}{5}<k<\frac{2}{3}$.

c) Trova l'equazione dell'ellisse che corrisponde a $k=2$ e disegnala sul piano cartesiano.



Sostituendo nell'equazione (1.1) $k = 2$ si ottiene $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. Per la rappresentazione sul piano cartesiano osserviamo che il semiasse maggiore è $a=2\sqrt{3}$ e quindi l'ellisse interseca l'asse x nei punti $\left(-2\sqrt{3};0\right)$ e $\left(2\sqrt{3};0\right)$, il semiasse minore è $b=2$ e quindi l'ellisse interseca l'asse y nei punti $\left(-2;0\right)$ e $\left(2;0\right)$.

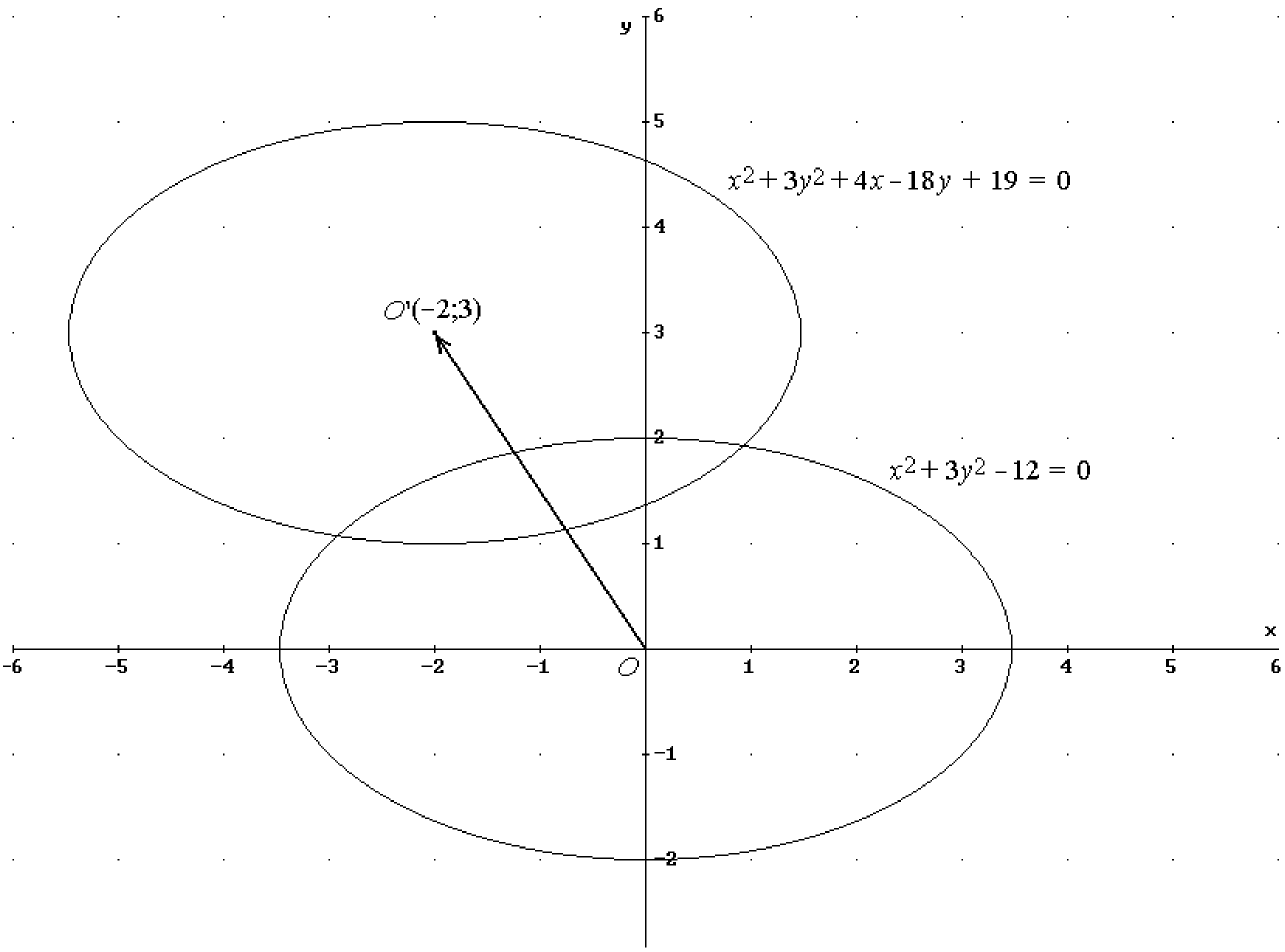
d) Dimostra che tale ellisse è tangente alla retta di equazione $x-y+4=0$. Trova le coordinate del punto T di tangenza.

Per stabilire se la retta è tangente dobbiamo vedere le soluzioni del sistema $\begin{cases} \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \\ x-y+4=0 \end{cases}$. Ricavando y dalla seconda, sostituendo nella prima e risolvendo si ha: $\left(x+3\right)^2=0$ e quindi il sistema ammette due soluzioni coincidenti ($x=-3$) e quindi la retta è tangente nel punto $T\left(-3;1\right)$.

e) Siano ora T_1 il simmetrico di T rispetto all'asse x. Dimostra che il triangolo costituito dalle tangenti all'ellisse nei punti T e T_1 e dall'asse delle ordinate è rettangolo isoscele.

Il punto T_1 ha coordinate $T_1\left(-3;-1\right)$. Con la formula di sdoppiamento $\frac{xx_0}{12}+\frac{yy_0}{4}=1$ troviamo la tangente: $x+y+4=0$. Si poteva anche dire che poiché T_1 è il simmetrico di T rispetto all'asse x e l'ellisse è una curva simmetrica rispetto all'asse x, allora la tangente è la retta simmetrica di $x-y+4=0$ rispetto all'asse x. La sua equazione si ottiene scambiano y con $-y$.
Indichiamo con M il punto in cui le due tangenti si incontrano: ed è facile vedere che il punto ha coordinate (-4;0) ossia la soluzione del sistema $\begin{cases} x-y+4=0 \\ x+y+4=0 \end{cases}$.
Indichiamo quindi con N e Q i punti in cui le rette $x-y+4=0$ e $x+y+4=0$ incontrano rispettivamente l'asse y: $N\left(0;4\right)$ e $Q\left(0;-4\right)$. Il triangolo è isoscele perché $\overline{MN}=\overline{MQ}=4\sqrt{2}$; il triangolo è rettangolo perché $\overline{MN}^2+\overline{MQ}^2=\overline{NQ}^2$, ossia vale il teorema di Pitagora. Questa seconda parte si poteva dimostrare anche dicendo che poiché le tangenti sono parallele alle bisettrici del I e III quadrante e del II e IV, esse formano angoli di 45° con l'alle delle x e quindi l'angolo $N\widehat{M}Q$ è retto.

f) Sempre relativamente all'ellisse che corrisponde a $k=2$, trova l'equazione dell'ellisse traslata di un vettore $\vec{v}=\left(-2;3\right)$ e rappresentala sul piano cartesiano.
Per ottenere l'equazione dell'ellisse traslata è necessario sostituire x con (x + 2) e y con (y – 3). Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione: $x^2+3y^2+4x-18y+19=0$.
Per la rappresentazione grafica basta traslare tutti i punti del vettore $\vec{v}=\left(-2;3\right)$



$x^2+3y^2+4x-18y+19=0$
$O'(-2;3)$
$x^2+3y^2-12=0$
O
x
y
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1 -1 -2

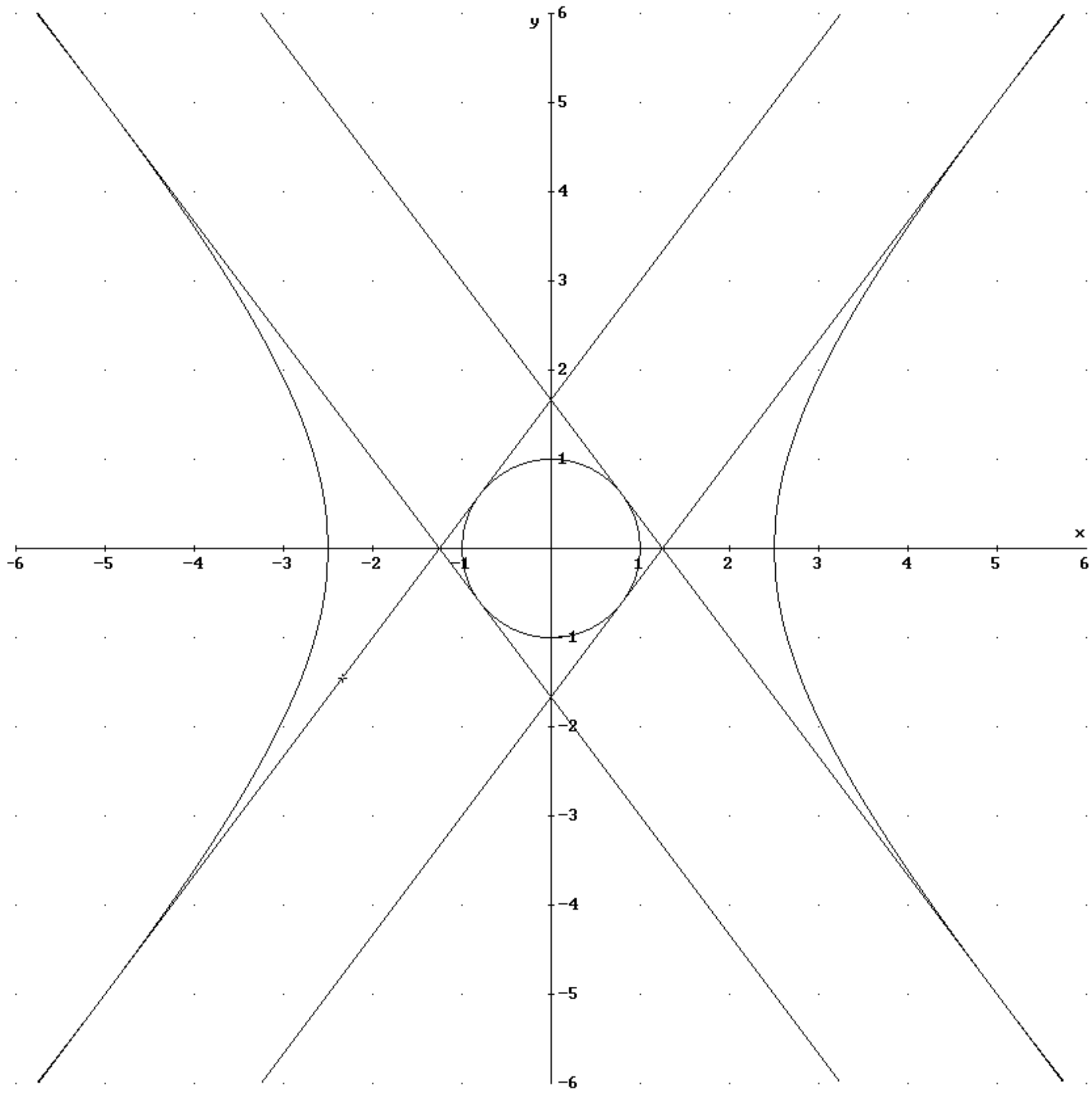
QUESITO 2

L'iperbole α, con i fuochi sull'asse delle ascisse, ha il semiasse trasverso di lunghezza $5/2$ e gli asintoti di equazioni $2x\sqrt{3} \pm 3y = 0$ mentre la circonferenza β ha raggio 1 e centro l'origine degli assi.

a) Determina le equazioni di α e di β

L'iperbole avrà equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; dalle indicazioni del testo si ha: $\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ e quindi l'equazione $\frac{4x^2}{25} - \frac{3y^2}{25} = 1$ o anche $4x^2 - 3y^2 = 25$. L'equazione della circonferenza è invece: $x^2 + y^2 = 1$



b) Trova le equazioni delle quattro tangenti comuni a α e β e calcola le coordinate dei quattro punti di tangenza con l'iperbole.

Si vede facilmente dal grafico che le tangenti comuni non possono essere verticali (data la simmetria delle figure, se così fosse le due curve dovrebbero essere tangenti in un punto dell'asse x), quindi l'equazione della retta avrà la forma $y = mx + q$.

Se la retta è tangente all'iperbole allora l'equazione risolvente il sistema $\begin{cases} 4x^2 - 3y^2 = 25 \\ y = mx + q \end{cases}$ deve avere il discriminante uguale a zero; sviluppando i calcoli si ottiene che deve essere $12q^2 - 75m^2 + 100 = 0$. Infatti sostituendo la seconda nella prima equazione si ha:

$4x^2 - 3(mx+q)^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow$

(2.1) $$\left(4-3m^2\right)x^2 - 6mqx - \left(3q^2+25\right) = 0$$

Ponendo $\frac{\Delta}{4} = (3mq)^2 + \left(4-3m^2\right)\left(3q^2+25\right) = 0$ si ricava $12q^2 - 75m^2 + 100 = 0$

Se la retta è tangente alla circonferenza, allora la sua distanza dal centro della circonferenza deve essere uguale al raggio e quindi $\frac{|q|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$, ossia $|q| = \sqrt{m^2+1}$.

Poiché cerchiamo rette che siano tangenti sia all'iperbole, sia alla circonferenza i valori di m e q risulteranno dalle soluzioni del sistema costituito dalle due condizioni, ossia deve essere

$\begin{cases} 12q^2 - 75m^2 + 100 = 0 \\ |q| = \sqrt{m^2+1} \end{cases}$ da cui segue $9m^2 - 16 = 0$ e quindi $m = \pm\frac{4}{3}$ e di conseguenza $q = \pm\frac{5}{3}$. Le rette cercate sono quindi $y = \pm\frac{4}{3}x \pm \frac{5}{3}$.

Dall'equazione (2.1) e dalla condizione di tangenza ($\Delta = 0$) si ricava che i punti di tangenza cercati hanno ascissa

(2.2) $$x = \frac{3mq}{4-3m^2}$$

e ordinata

(2.3) $$y = mx + q = m\frac{3mq}{4-3m^2} + q = \frac{4q}{4-3m^2}$$

Si ha quindi

$m = \frac{4}{3}$	$q = \frac{5}{3}$	$x = -5$	$y = -5$
$m = \frac{4}{3}$	$q = -\frac{5}{3}$	$x = 5$	$y = 5$
$m = -\frac{4}{3}$	$q = \frac{5}{3}$	$x = -5$	$y = 5$
$m = -\frac{4}{3}$	$q = -\frac{5}{3}$	$x = 5$	$y = -5$

c) Trova l'area del quadrilatero individuato dalle quattro tangenti

Le tangenti sono a due a due parallele, quindi il quadrilatero è un parallelogramma e per la simmetria delle figure è un rombo.

i vertici del rombo sono in punti in cui le rette si incontrano e questi punti stanno due sull'asse x e due sull'asse y. Essi hanno coordinate: $\left(0;\pm\frac{5}{3}\right)$ e $\left(\pm\frac{5}{4};0\right)$. Le diagonali del rombo sono quindi $\frac{10}{3}$ e $\frac{5}{2}$ e quindi l'area è $\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{6}$.

QUESITO 3

a) Per quali valori dei coefficienti *a*, *b*, *c*, *d* la funzione omografica $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ha centro $C(-2;1)$ e passa per il punto $B(2;-1)$?

Le condizioni imposto portano al sistema: $\begin{cases} -\frac{d}{c}=-2 \\ \frac{a}{c}=1 \\ -1=\frac{2a+b}{2c+d} \end{cases}$ ricavando d dalla prima, a dalla seconda e sostituendo nella terza si ha: $\begin{cases} d=2c \\ a=c \\ -1=\frac{2c+b}{2c+2c} \end{cases}$ da cui $\begin{cases} d=2c \\ a=c \\ b=-6c \end{cases}$ quindi la funzione omografica ha equazione $y=\frac{cx-6c}{cx+2c}=\frac{x-6}{x+2}$ (ricorda che affinché la funzione omografica abbia senso deve essere $c\neq 0$ e $ad-bc\neq 0$) e quindi $a=1$, $b=-6$, $c=1$ e $d=2$

b) Trova le coordinate del punto *A* in cui interseca l'asse delle *x* e determina la tangente *t* in tale punto.

Il punto in cui la funzione interseca l'asse delle *x* è $A(6;0)$.

Per trovare la tangente alla funzione in esse scriviamo la generica retta che passa per *A* imponiamo che le intersezioni con la funzione omografia siano due coincidenti (il Δ dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione della retta e della funzione omografica deve essere zero).

La generica retta ha equazione $y=m(x-6)$. Il sistema è quindi

$\begin{cases} y=m(x-6) \\ y=\frac{x-6}{x+2} \end{cases}$ da cui segue l'equazione risolvente $mx^2-x(4m+1)-6(2m-1)=0$. Segue

$\Delta=(4m+1)^2+24m(2m-1)=64m^2-16m+1=0$ da cui $(8m-1)^2=0$ e quindi $m=\frac{1}{8}$.

L'equazione della tangente cercata è quindi $x-8y-6=0$.

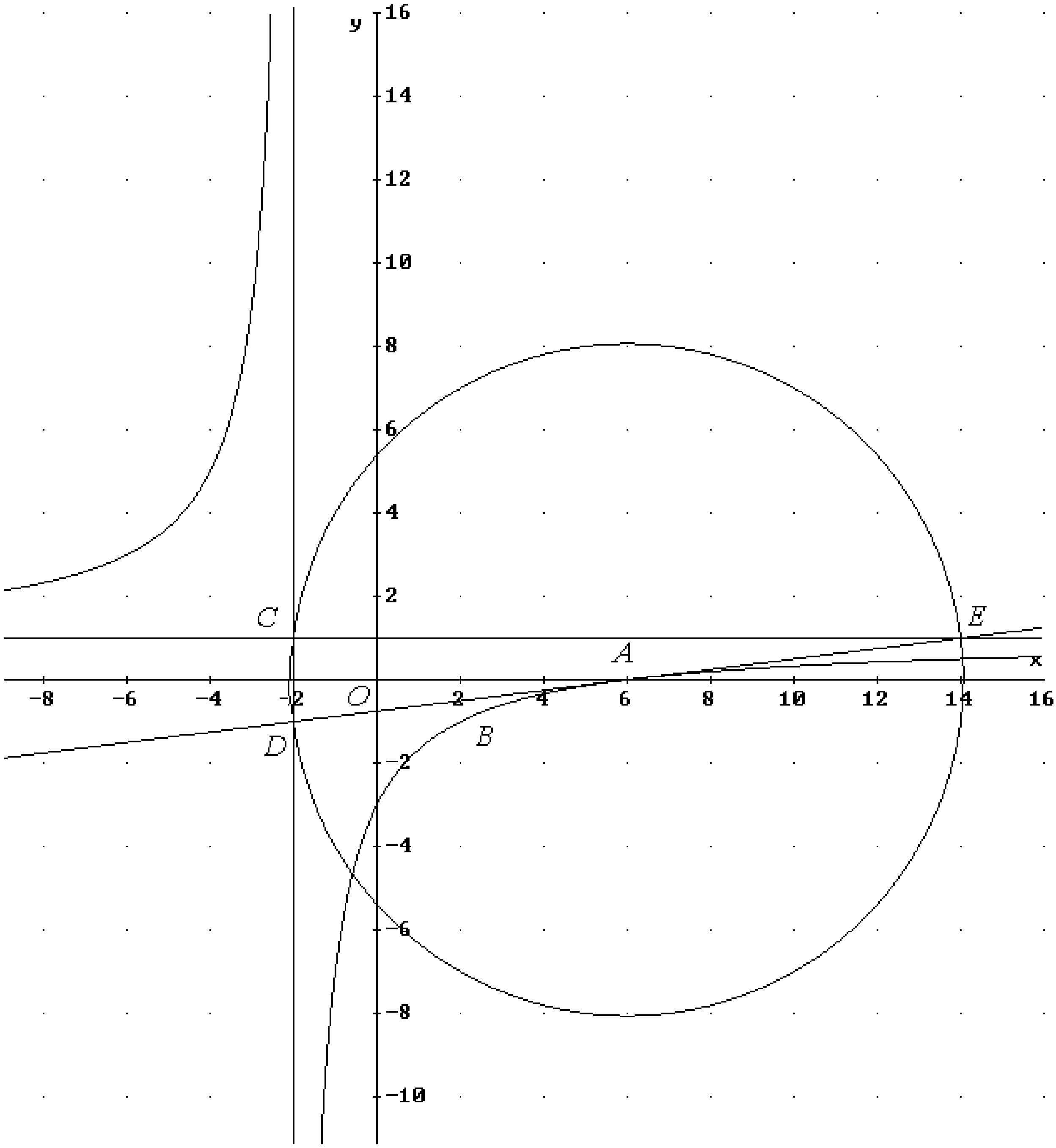
c) Detti *D* ed *E* i punti di intersezione fra *t* e gli asintoti, calcola l'area del triangolo *ECD*.

Il punto di *D* ha coordinate $D(-2;-1)$ e il punto *E* ha coordinate $E(14;1)$.

Poiché i segmenti *CD* e *CE* stanno sugli asintoti della funzione omografica, sono perpendicolari e il triangolo *DCE* è rettangolo in *C* e *CD* e *CE* sono i cateti, per cui, essendo $\overline{CD}=2$ e $\overline{CE}=16$, l'area del triangolo è16.

d) Trova l'equazione della circonferenza circoscritta a tale triangolo.

Come detto sopra il triangolo è rettangolo, quindi l'ipotenusa *DE* è il diametro della circonferenza e il punto medio di esso è il centro della circonferenza $\overline{DE}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{CE}^2}=2\sqrt{65}$. Il centro *F* avrà coordinate: $x_F=\frac{x_D+x_E}{2}=\frac{-2+14}{2}=6$ e $y_F=\frac{y_D+y_E}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$, cioè il punto *A*. L'equazione della circonferenza è quindi $(x-6)^2+y^2=\left(\sqrt{65}\right)^2$ ossia $x^2+y^2-12x-29=0$.



y
x
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12
14
16
C
E
A
O
D
B