Macerata 27 maggio 2015 – classe 3M – COMPITO DI RECUPERO OBIETTIVI MINIMI

SOLUZIONE

Considera il fascio di curve di equazione: $\dfrac{x^2}{k+2}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$

a) Determina per quali valori di *k* le curve sono delle ellissi. [punti 10]

Deve essere $\begin{cases} k+2>0 \\ 3-k>0 \end{cases}$ da cui segue $-2<k<3$

b) Determina per quali valori di *k* le curve sono delle iperboli con i fuochi sull'asse *x*. [punti 10]

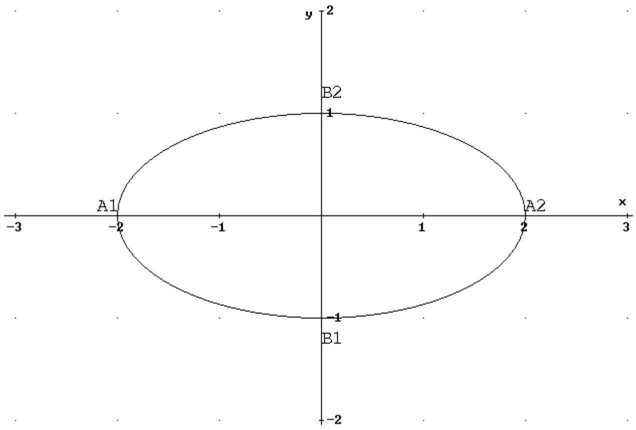
Deve essere $\begin{cases} k+2>0 \\ 3-k<0 \end{cases}$ da cui segue $k>3$

c) Determina per quale valore di *k* si ha una circonferenza. [punti 10]

Deve essere $-2<k<3$ e $k+2=3-k$ da cui segue $k=\dfrac{1}{2}$

d) Scrivi l'equazione dell'ellisse che corrisponde a *k* = 2 [punti 10], determina i fuochi e rappresentala sul piano cartesiano [punti 10]

L'equazione è $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. I fuochi generici hanno coordinate $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$ dove $c^2=a^2-b^2=4-1=3$, quindi $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$. Per il grafico troviamo i punti in cui l'ellisse incontra gli assi: $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(-1;0)$ e $B_2(1;0)$.



e) Scrivi l'equazione dell'iperbole che corrisponde a *k* = 7 [punti 10], determina gli asintoti e i fuochi [punti 10]

L'equazione è $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$. I fuochi generici hanno coordinate $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$ dove $c^2=a^2+b^2=9+4=13$, quindi $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$. Gli asintoti generici di una iperbole hanno equazione $y = \pm\frac{b}{a}x$, per cui si ha: $y = \pm\frac{2}{3}x$.

f) Trova le equazioni delle rette tangenti all'ellisse parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante [punti 20]

Le rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante hanno equazione $y = x + q$. La condizione di tangenza si ricava ponendo uguale a zero il discriminante dell'equazione che risolve il sistema $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = x + q \end{cases}$, ossia l'equazione $5x^2 + 8qx + 4q^2 - 4 = 0$. Si ha: $\frac{\Delta}{4} = 16q^2 - 5\left(4q^2 - 4\right) = 0$ da cui si ricava $q = \pm\sqrt{5}$. Le rette cercate hanno quindi equazione $y = x \pm \sqrt{5}$

g) Considera quella che interseca l'asse *y* nel punto di ordinata positiva e dimostra che è anche tangente all'iperbole [punti 10]

Delle due, la retta che interseca l'asse delle y nel punto di ordinata positiva è quella di equazione $y = x + \sqrt{5}$. Per dimostrare che è tangente all'iperbole bisogna far vedere che il discriminante dell'equazione che risolve il sistema $\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x + \sqrt{5} \end{cases}$ è zero. Si ha l'equazione $5x^2 + 18x\sqrt{5} + 81 = 0$ il cui discriminante è $\frac{\Delta}{4} = \left(9\sqrt{5}\right)^2 - 5 \cdot 81 = 0$.