Macerata 28 aprile 2015 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA

SOLUZIONE QUESITO 1

Considera il fascio di ellissi di centro l'origine di equazione: $(1-k)x^2+(k+6)y^2=(1-k)(k+6)$

a) Scrivi l'equazione nella forma canonica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ esplicitando a e b .

$$\frac{x^2}{k+6}+\frac{y^2}{1-k}=1 \qquad a=\sqrt{k+6} \qquad b=\sqrt{1-k}$$

b) Trova per quali valori di k le ellissi sono reali specificando cosa succede per $k=1$ e $k=-6$.

$$-6<k<1$$

Deve essere $\begin{cases} k+6>0 \\ 1-k>0 \end{cases}$ da cui segue $-6<k<1$.

Per $k=1$ l'equazione diventa $7y^2=0$ ossia $y=0$ e l'ellisse si riduce all'asse delle *x*.
Per $k=-6$ l'equazione diventa $7x^2=0$ ossia $x=0$ e l'ellisse si riduce all'asse delle *y*.
Che risultano quindi due ellissi degeneri

c) Per quali valori di k l'ellisse è una circonferenza? Per quale valore di k le ellissi hanno i fuochi sull'asse *x*?

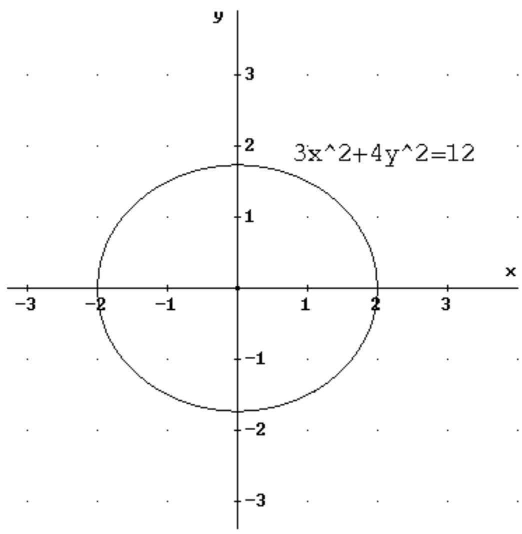
$$k=-\frac{5}{2} \qquad -\frac{5}{2}<k<1$$

L'ellisse è una circonferenza se $a=b$, ossia se $\sqrt{k+6}=\sqrt{1-k}$ elevando al quadrato si ricava $k=-\frac{5}{2}$.
Le ellissi hanno i fuochi sull'asse delle x se $a>b$, o, che, nella condizione che l'ellisse sia reale ($-6<k<1$) è la stessa cosa, se $a^2>b^2$. Si ricava: $-\frac{5}{2}<k<1$.

d) Trova l'equazione dell'ellisse che corrisponde a $k=-2$ e disegnala sul piano cartesiano.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

Sostituendo $k=-2$ si ricava: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.
Il semiasse maggiore è $a=2$, il semiasse minore è $b=\sqrt{3}$. L'ellisse interseca l'asse *x* nei punti $(-2;0)$ e $(2;0)$ e l'asse *y* nei punti $(0;-\sqrt{3})$ e $(0;\sqrt{3})$.



e) Dimostra che tale ellisse è tangente alla retta di equazione $x+2y-4=0$. Trova le coordinate del punto di tangenza.

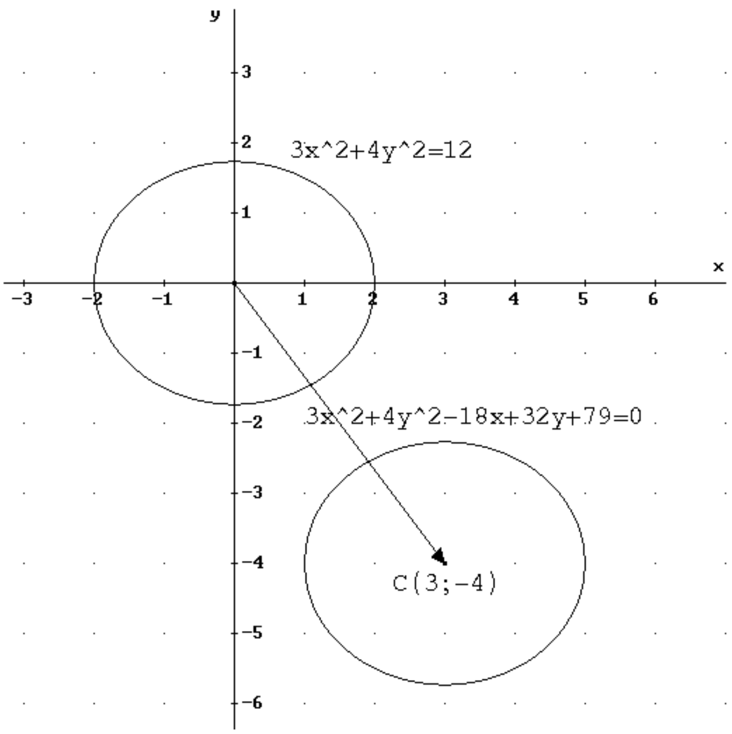
$$\left(1;\frac{3}{2}\right)$$

Mettiamo a sistema l'equazione dell'ellisse e quella della retta $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ ricavando x dalla seconda e sostituendo nella prima si ottiene: $4y^2-12y+9=(2y-3)^2=0$. Poiché il discriminante di tale equazione è zero, la retta è tangente all'ellisse. Si ha inoltre che l'equazione si annulla per $y=\dfrac{3}{2}$ e sostituendo nell'equazione della retta si ottiene che il punto di tangenza ha coordinate $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

f) Sempre relativamente all'ellisse che corrisponde a $k=-3$, trova l'equazione dell'ellisse traslata di un vettore $\vec{v}=(3;-4)$ e rappresentala sul piano cartesiano.

$$3x^2+4y^2-18x+32y+79=0$$

L'ellisse cercata si ottiene mediante la traslazione di equazione $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-4 \end{cases}$. Ricavando x e y e sostituendo nell'equazione dell'ellisse, togliendo gli apici, si ricava: $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y+4)^2}{3}=1$ da cui segue: $3x^2+4y^2-18x+32y+79=0$.

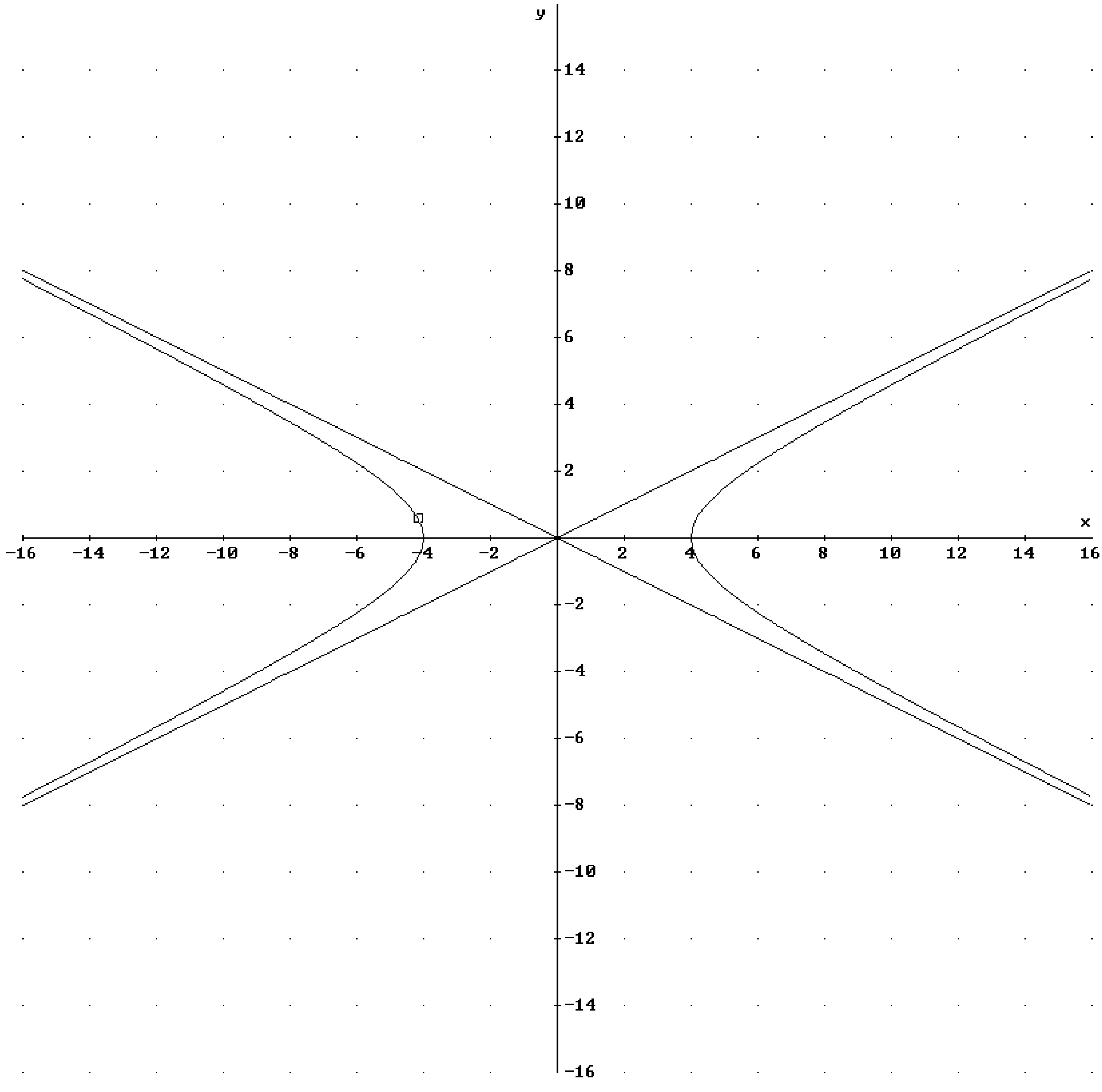


SOLUZIONE QUESITO 2

2a)

$c=2\sqrt{5}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ quindi $a=\dfrac{c}{e}=4$ e $b=\sqrt{c^2-a^2}=2$.

L'equazione è $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ gli asintoti sono: $y=\pm\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{1}{2}x$



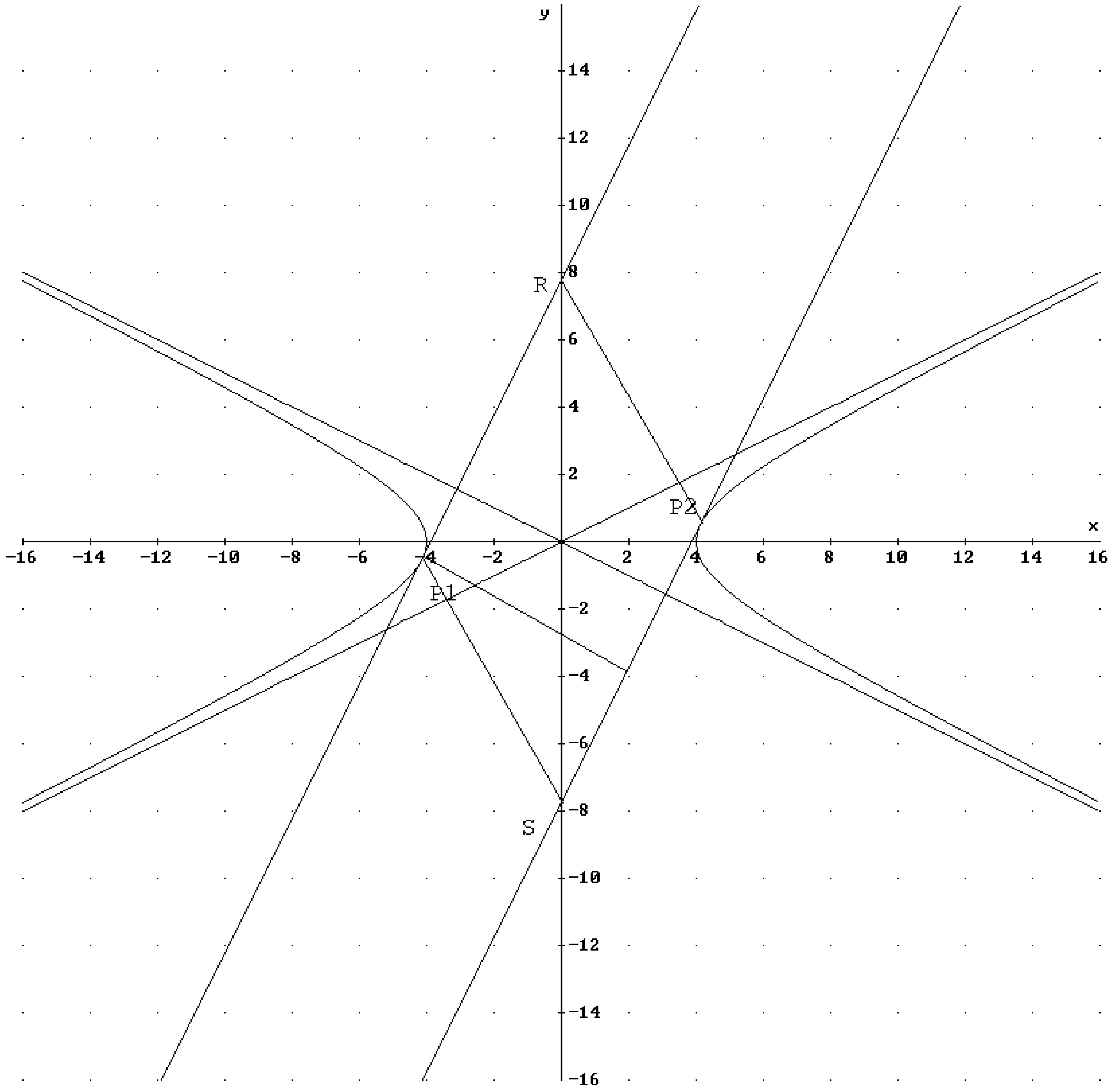
2b) $\begin{cases} y=2x+q \\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ sostituendo si ha: $x^2-4(2x+q)^2=16$ da cui

(2.1) $15x^2+16qx+4q^2+16=0$.

Ponendo $\dfrac{\Delta}{4}=0$ si ha: $4q^2-240=0$ da cui $q=\pm2\sqrt{15}$ e quindi le terre tangenti $y=2x\pm2\sqrt{15}$.

Ricordando che $\frac{\Delta}{4}=0$ e i valori di q ora trovati, le soluzioni della (2.1) sono $x=\frac{-8q}{15}=\pm\frac{16\sqrt{15}}{15}$ per cui $y=\pm\frac{2}{\sqrt{15}}=\pm\frac{2\sqrt{15}}{15}$ si ha quindi $P1\left(-\frac{16\sqrt{15}}{15};-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)$ e $P2\left(\frac{16\sqrt{15}}{15};\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)$.

2c) $R\left(0;2\sqrt{15}\right)$ e $S\left(0;-2\sqrt{15}\right)$. Il quadrilatero P_1SP_2R è un parallelogramma per cui l'area si trova, per esempio, base (SP_2) per altezza h (distanza di P_1 dalla retta p_2)



$$SP_2=\sqrt{\left(0-\frac{16\sqrt{15}}{15}\right)^2+\left(-2\sqrt{15}-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2}=\frac{16}{3}\sqrt{3}$$

$$h=\frac{\left|2\left(-\frac{16\sqrt{15}}{15}\right)-\left(-\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)-2\sqrt{15}\right|}{\sqrt{5}}=4\sqrt{3}$$

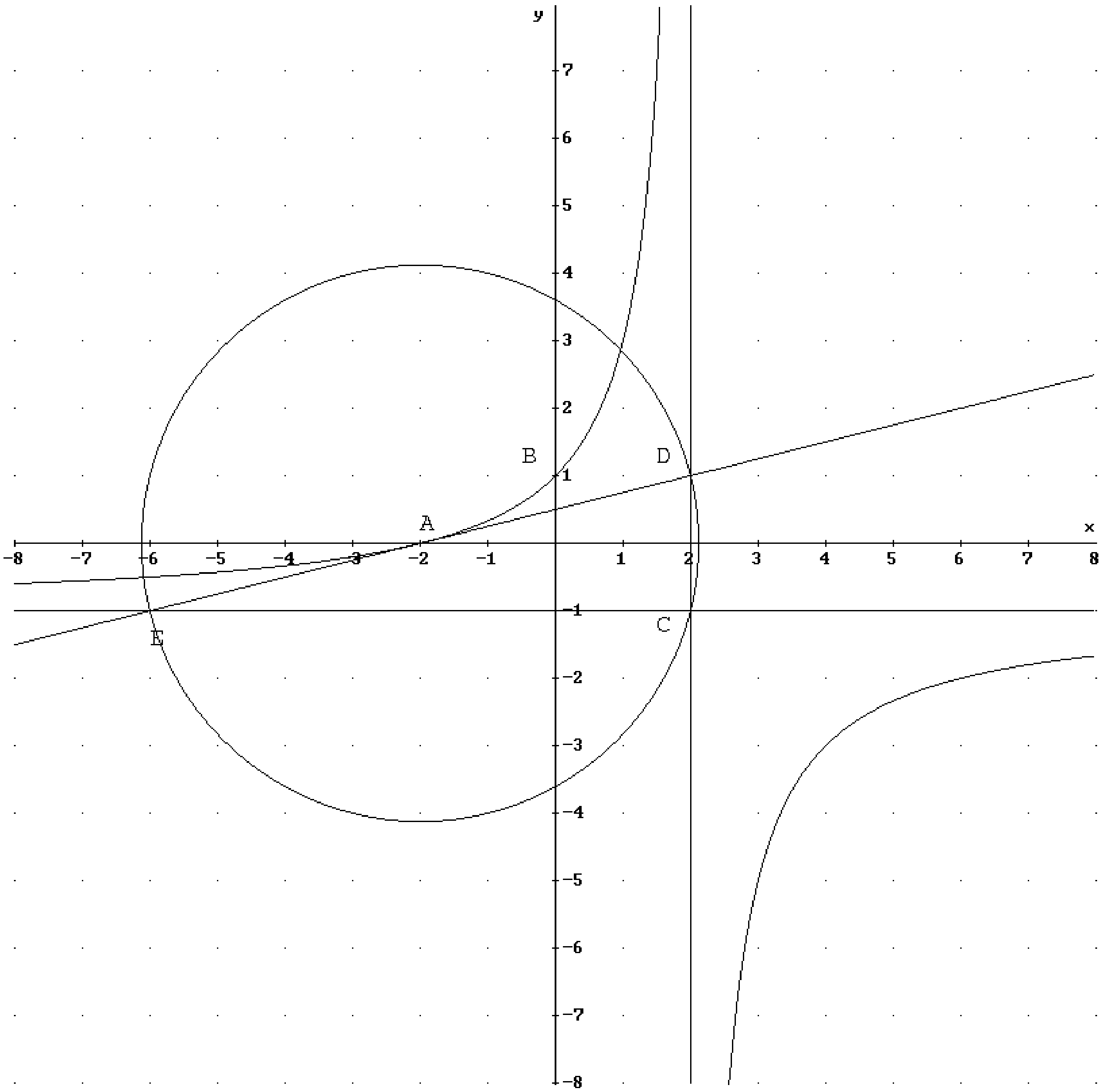
Area = $\frac{16}{3}\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=64$

SOLUZIONE QUESITO 3

3a)

Centro $C\left(2;-1\right)$ e passa per $B\left(0;1\right)$. Si ha:

$\begin{cases} -\frac{d}{c}=2 \\ \frac{a}{c}=-1 \\ 1=\frac{b}{d} \end{cases}$ da cui segue $\begin{cases} d=-2c \\ a=-c \\ b=d=-2c \end{cases}$ l'equazione è quindi $y=\frac{-x-2}{x-2}$



3b)

$$\begin{cases} y = \dfrac{-x-2}{x-2} \\ y = 0 \end{cases}$$ si ha x = -2 quindi $A(-2;0))$

La retta generica per A è $y = m(x+2)$, quindi $\begin{cases} y = \dfrac{-x-2}{x-2} \\ y = m(x+2) \end{cases}$ da cui segue: $mx^2 + x - 4m + 2 = 0$ ponendo $\Delta = 0$ si ha: $m = \dfrac{1}{4}$ per cui la tangente in A ha equazione $x - 4y + 2 = 0$.

3c)

Intersezione con l'asintoto verticale $\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ $D(2;1)$

Intersezione con l'asintoto orizzontale $\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $E(-6;-1)$.

Il triangolo ECD è rettangolo in C, quindi l'area è la metà di EC per CD.

EC = 8

CD = 2

Area = 8

3d) Essendo il triangolo rettangolo, la circonferenza circoscritta ha centro nel punto medio dell'ipotenusa $M(-2;0)$ ossia il punto A. Il raggio è la metà dell'ipotenusa, ossia

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2} = \sqrt{17}$$

La circonferenza cercata ha quindi equazione

$(x+2)^2 + y^2 = 17$, ossia $x^2 + y^2 + 4x - 13 = 0$