Macerata 24 marzo 2015 – classe 3M – COMPITO DI RECUPERO ASSENTI

Problema 1
E' dato il fascio di parabole di equazione $y = (3k-2)x^2 + 2(3-5k)x - 4 + 7k$

a) Studia la concavità.
Bisogna studiare il segno del coefficiente di x^2, ossia di $3k-2$. SI ha quindi la concavità rivolta verso l'alto se $k > \frac{2}{3}$, verso il basso se $k < \frac{2}{3}$, mentre se $k = \frac{2}{3}$ si ha la parabola degenere (una retta) di equazione $2x + 3y - 2 = 0$.

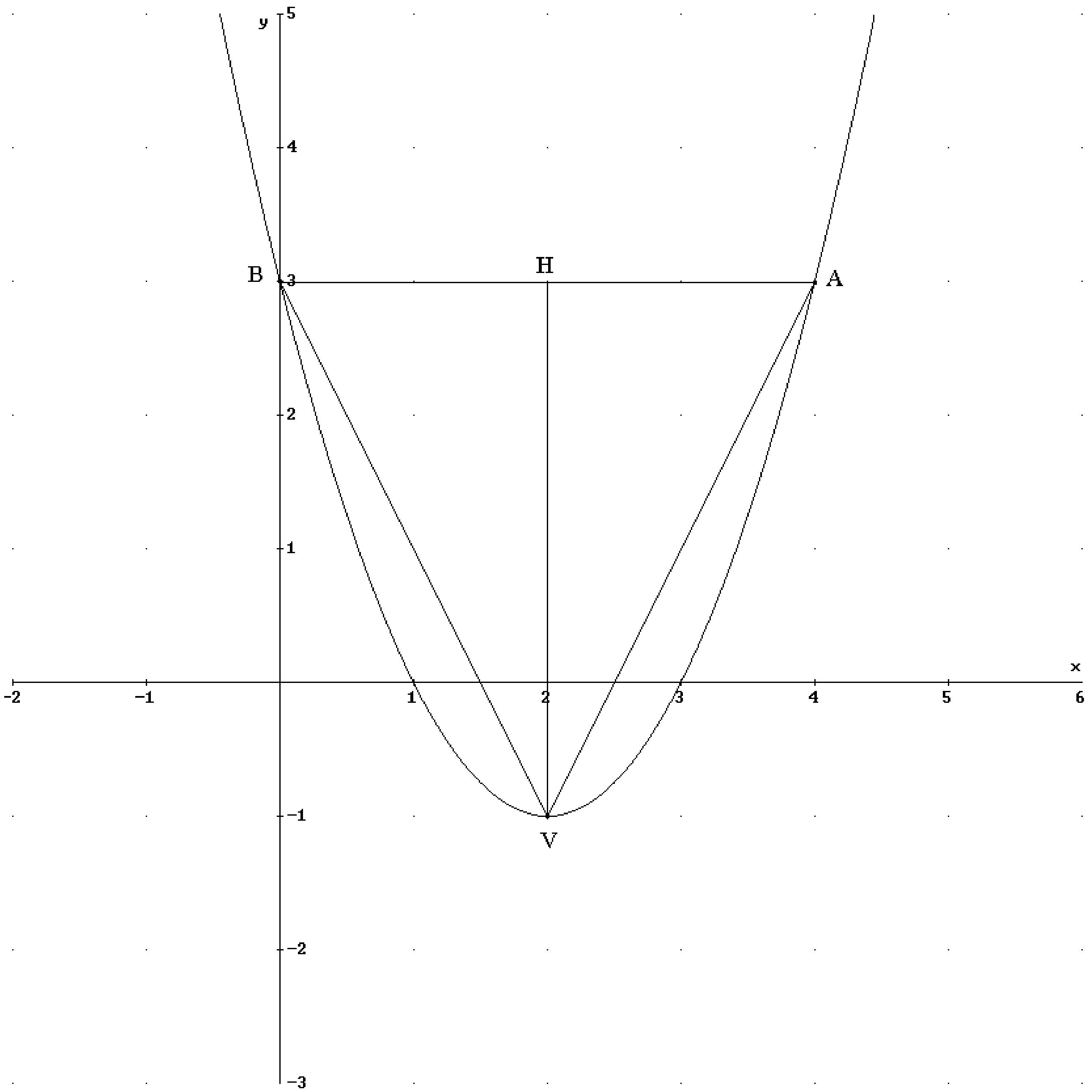
b) Trova le parabole generatrici del fascio e gli eventuali punti base.
Sviluppando l'equazione del fascio si ha:, $\left(y + 2x^2 - 6x + 4\right) - k\left(3x^2 - 10x + 7\right) = 0$. Le generatrici sono: la parabola $y = -2x^2 + 6x - 4$ e le rette $x = 1$ e $x = \frac{7}{3}$ che sono le soluzioni dell'equazione $3x^2 - 10x + 7 = 0$. I punti base sono le soluzioni dei sistemi $\begin{cases} y = -2x^2 + 6x - 4 \\ x = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -2x^2 + 6x - 4 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$, ossia i punti $P_1(1,0)$ e $P_2\left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{9}\right)$

c) Trova le parabole degeneri
Nei punti precedenti sono state trovate le parabole degeneri; sono le rette: $2x + 3y - 2 = 0$, $x = 1$, $x = \frac{7}{3}$.

d) Determina per quale valore di *k* la parabola del fascio passa per il punto $A(4;3)$. Determina il suo vertice V.
Sostituendo le coordinate di *A* nell'equazione del fascio si ottiene: $k = 1$ e quindi la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$ il cui vertice ha coordinate $V(2;-1)$

e) Determina le coordinate del punto *B* in cui la parabola incontra l'asse *y* e il simmetrico di questo rispetto all'asse della parabola dimostrando che esso è *A*.
Il punto *B* in cui la parabola incontra l'asse *y* ha coordinate $B(0;3)$. Se il simmetrico di *B* rispetto all'asse della parabola è *A*, deve essere $x_V = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_A = y_B$. Si vede facilmente che le condizioni sono soddisfatte.

f) Calcola l'area del triangolo BVA.
Il triangolo BVA è isoscele sulla base AB. La sua area si ricava quindi dalla formula $Area = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VH}}{2}$ essendo H il piede dell'altezza condotta da V alla base AB. Facilmente si ricava che $H(2;3)$. Si ha quindi: $\overline{AB} = |x_A - x_B| = 4$ e $\overline{VH} = |y_V - y_H| = 4$. L'area cercata è quindi 8.

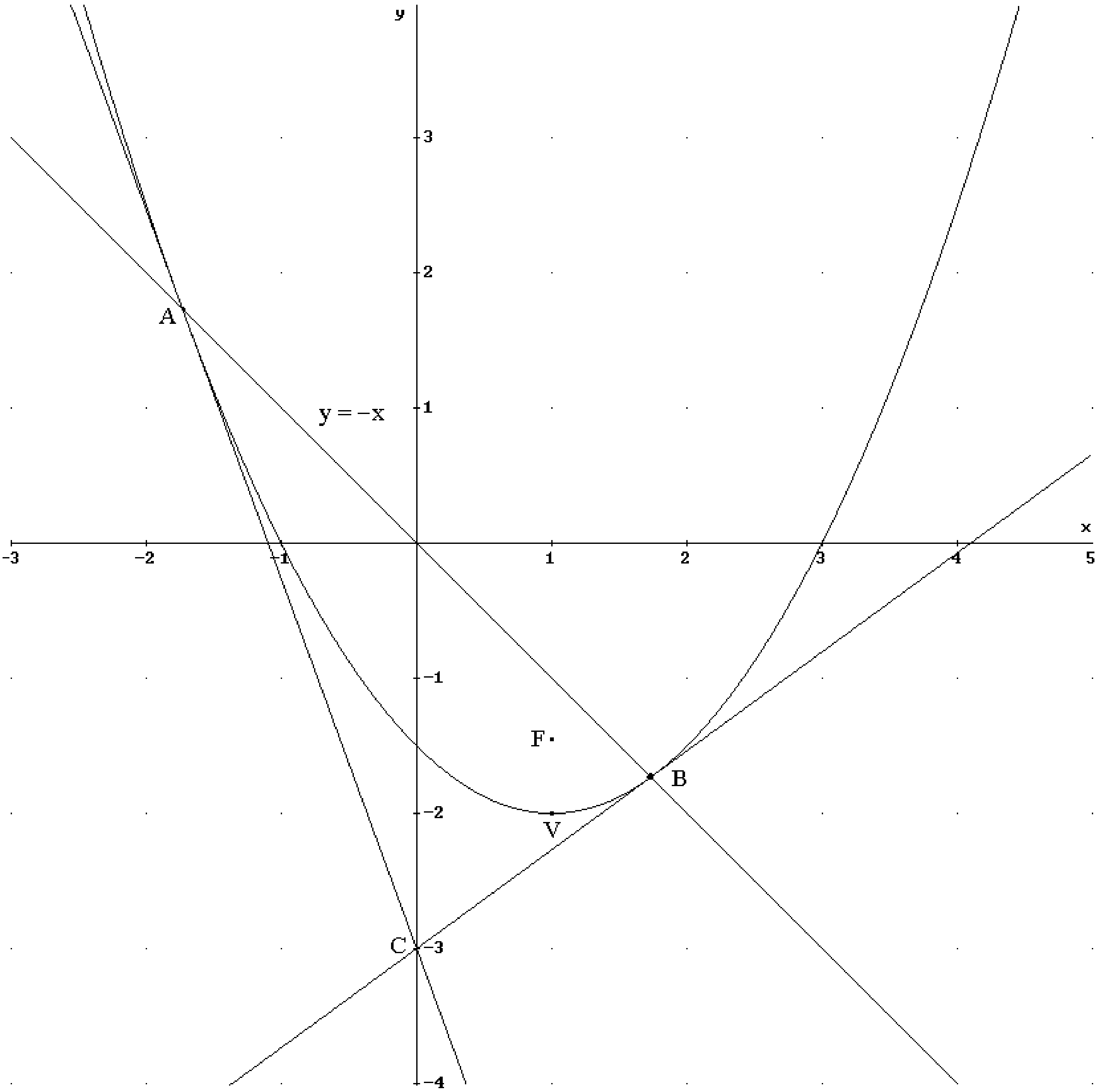


y
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
x
-2
-1
1
2
3
4
5
6
B
H
A
V

Problema 2

a) Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ e vertice $V\left(1;-2\right)$. Rappresentala su di un piano cartesiano.

Poiché l'ascissa de vertice è uguale a quella del fuoco allora la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse y e l'equazione sarà del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.Dalle coordinate del vertice di ricava che $-\frac{b}{2a} = 1$ e $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -2$, mentre dall'ordinata del fuoco si ricava $\frac{1-\left(b^2-4ac\right)}{4a} = -\frac{3}{2}$.



Mettendo a sistema: $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -2 \\ \frac{1-\left(b^2-4ac\right)}{4a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$ ricavando *b* dalla prima e sostituendo nella seconda e nella terza si ha: $\begin{cases} b=-2a \\ a-c=2 \\ 1-4a^2+4ac+6a=0 \end{cases}$ (a può essere semplificato essendo diverso da zero). Ricavando c dalla seconda e sostituendo nella terza si ha: $\begin{cases} b=-2a \\ c=a-2 \\ 1-2a=0 \end{cases}$ da cui si ricava l'equazione della parabola: $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$.

b) Determina le tangenti in A e in B alla parabola, dove A e B le intersezioni con la bisettrice del II e IV quadrante ($x_A < x_B$). Trova il punto C di intersezione delle tangenti.

I punti A e B si ricavano dalla soluzione del sistema $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2} \\ y=-x \end{cases}$. Si ha: $A\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ e $B\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$. Utilizzando la formula di sdoppiamento $\frac{y+y_0}{2}=axx_0+b\frac{x+x_0}{2}+c$ si ricava che la tangente in A ha equazione: $y=-x\left(\sqrt{3}+1\right)-3$ e quella in B ha equazione: $y=x\left(\sqrt{3}-1\right)-3$. È immediato vedere che poiché le due rette hanno lo stesso termine noto passano entrambe per il punto $(0;-3)$ che è il punto C richiesto. In modo alternativo basta risolvere il sistema $\begin{cases} y=-x\left(\sqrt{3}+1\right)-3 \\ y=x\left(\sqrt{3}-1\right)-3 \end{cases}$ ossia l'equazione $-x\left(\sqrt{3}+1\right)-3=-x\left(\sqrt{3}+1\right)-3$ da cui si ricava $x=0$ e quindi $y=-3$.

c) Determina un punto D sull'asse x tale che l'area del triangolo ABD sia uguale a $4\sqrt{3}$.
Siano $(h;0)$ le coordinate del punto D, dove h è un numero reale L'area del triangolo può essere calcolata mediante la formula $Area=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DH}}{2}$ essendo H il piede dell'altezza condotta da D alla base AB. $\overline{AB}=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}=2\sqrt{6}$, mentre
$\overline{DH}=\text{distanza}(H;\text{bisettrice II e IV quadrante})=\frac{|h|}{\sqrt{2}}$.

Si ha quindi $4\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{6}\right)\frac{|h|}{\sqrt{2}}$ da cui $|h|=4$. I punti sono quindi due, simmetrici, $D_1(-4;0)$ e $D_2(4;0)$

d) Calcola l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola e dalla bisettrice del II e IV quadrante.
Per determinare l'area del segmento parabolico richiesto dobbiamo trovare la parallela alla bisettrice del II e IV quadrante che è tangente alla parabola. La sua equazione generica è $y=-x+q$. Imponiamo la condizione di tangenza, ossia che il discriminante dell'equazione che risolve il sistema $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2} \\ y=-x+q \end{cases}$ sia zero. L'equazione risolvente è $\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=-x+q$, ossia $x^2-3-2q=0$ da

cui $\Delta = -4(-3-2q) = 0$ e quindi $q = -\frac{3}{2}$. L'equazione cercata è quindi $y = -x - \frac{3}{2}$. Dobbiamo ora trovare la distanza d di tale retta da A o da B; si ha: $d = \frac{\left|-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. L'area del segmento parabolico $Area = \frac{2}{3}\overline{AB} \cdot h = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{6}\right)\frac{3\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{3}$.