Macerata 16 aprile 2015 – classe 3M – COMPITO DI RECUPERO OBIETTIVI MINIMI

SOLUZIONE PROBLEMA 1

a) Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y di vertice $V(2;-2)$ e tangente alla retta $y=2x-7$. [punti 20]

$$y=x^2-4x+2$$

pag. 355 n. 283

L'equazione generica della parabola cercata è $y=ax^2+bx+c$. ricordando che le coordinate generiche del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ si ha:

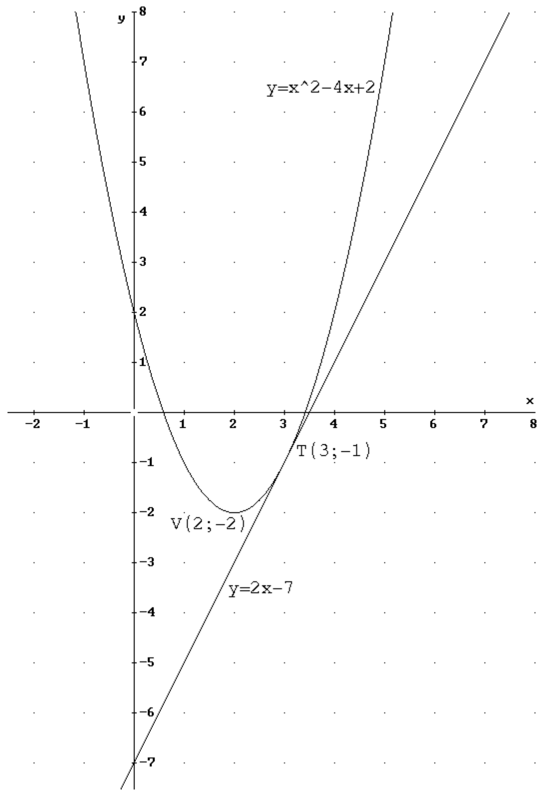
$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2\\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=-2\end{cases}$ da cui segue, sostituendo: $\begin{cases}b=-4a\\ c=4a-2\end{cases}$.

L'equazione della parabola cercata può quindi essere scritta nella forma: $y=ax^2-4ax+4a-2$.

Per utilizzare la condizione di tangenza poniamo a sistema l'equazione della parabola e quella della retta $\begin{cases}y=ax^2-4ax+4a-2\\ y=2x-7\end{cases}$. L'equazione risolvente è:

$ax^2-2(2a+1)x+4a+5=0$; la retta è tangente se

$\frac{\Delta}{4}=(2a+1)^2-a(4a+5)=0$ da cui si ricava $a=1$ e quindi la parabola richiesta ha equazione $y=x^2-4x+2$.



b) Calcola in punto T di tangenza tra la retta data e la parabola trovata. [punti 10].

$$T(3;-1)$$

Sostituendo $a=1$ nell'equazione risolvente $ax^2-2(2a+1)x+4a+5=0$ si ha: $x^2-6x+9=0$; risolvendo si ha $x=3$ che sostituito nell'equazione della tangente otteniamo $y=-1$. Il punto di tangenza ha coordinate $T(3;-1)$.

c) Trova le equazioni delle rette tangenti alla parabola condotte dal punto $A\left(\frac{3}{2};-8\right)$. [Punti 20]

$$y=-6x+1 \qquad y=4x-14$$

Per prima cosa scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette di centro A: $y+8=m\left(x-\frac{3}{2}\right)$, o anche $y = mx - \frac{3}{2}m - 8$. Per trovare le tangenti mettiamo a sistema l'equazione della parabola e quella del fascio di rette: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = mx - \frac{3}{2}m - 8 \end{cases}$. Risolvendo si ottiene l'equazione: $2x^2 - 2(4+m)x + 20 + 3m = 0$. Le tangenti si ottengono ponendo $\frac{\Delta}{4} = (4+m)^2 - 2(20+3m) = 0$ da cui le soluzioni $m = -6$ e quindi la retta $y = -6x + 1$ e $m = 4$ e quindi la retta $y = 4x - 14$.

SOLUZIONE PROBLEMA 2

Dato il fascio di parabole di equazione $(1+k)x^2 - 4kx + (k-1)y = 0$

a) Trova per quali valori di *k* le parabole sono degeneri e scrivine le equazioni [punti 10]

$k = -1 \quad \to \quad y = 2x$

$k = 1 \quad \to \quad x = 0$ e $x = 2$

pag. 363 n. 348.

Le parabole degeneri si ottengono ponendo $(1+k) = 0$, da cui si ricava $k = -1$ e la parabola degenere ha equazione $y = 2x$ e ponendo $(k-1) = 0$, da cui $k = 1$ e le parabole degeneri si ottengono dalla soluzione dell'equazione $2x^2 - 4x = 0$ (ottenuta sostituendo $k = 1$ nel'equazione del fascio) le equazioni sono $x = 0$, ossia l'asse y, e la retta $x = 2$.

b) Trova i punti base del fascio. [punti 20]

$A(0;0) \qquad B(2;4)$

Per trovare i punti base possiamo procedere in vari modi. Il più semplice consiste nell'intersecare le parabole degeneri, si ha: $\begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \end{cases}$ da cui il punto $A(0;0)$ e $\begin{cases} y = 2x \\ x = 2 \end{cases}$ da cui il punto $B(2;4)$.

In un altro modo possiamo scrivere l'equazione del fascio nella forma $(x^2 - y) + k(x^2 - 4x + y) = 0$ ottenuta sviluppando l'espressione del fascio e raccogliendo i termini con *k* e quelli senza *k*. In questo modo restano definite due parabole $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$; mettendo a sistema le due equazioni otteniamo $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$ e risolvendo si ricavano i punti *A* e *B*.

c) Trova l'equazione della parabola del fascio che interseca l'asse *x* in un punto C (con $x_C > 0$) in modo tela che il segmento AC sia lungo 6. [punti 20]

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

Poiché A è l'origine, il punto C ha coordinate $C(6;0)$. Sostituendo le coordinate di C nell'equazione del fascio si ha $(1+k)36 - 24k = 0$. La parabola cercata corrisponde a $k = -3$ ed ha equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.