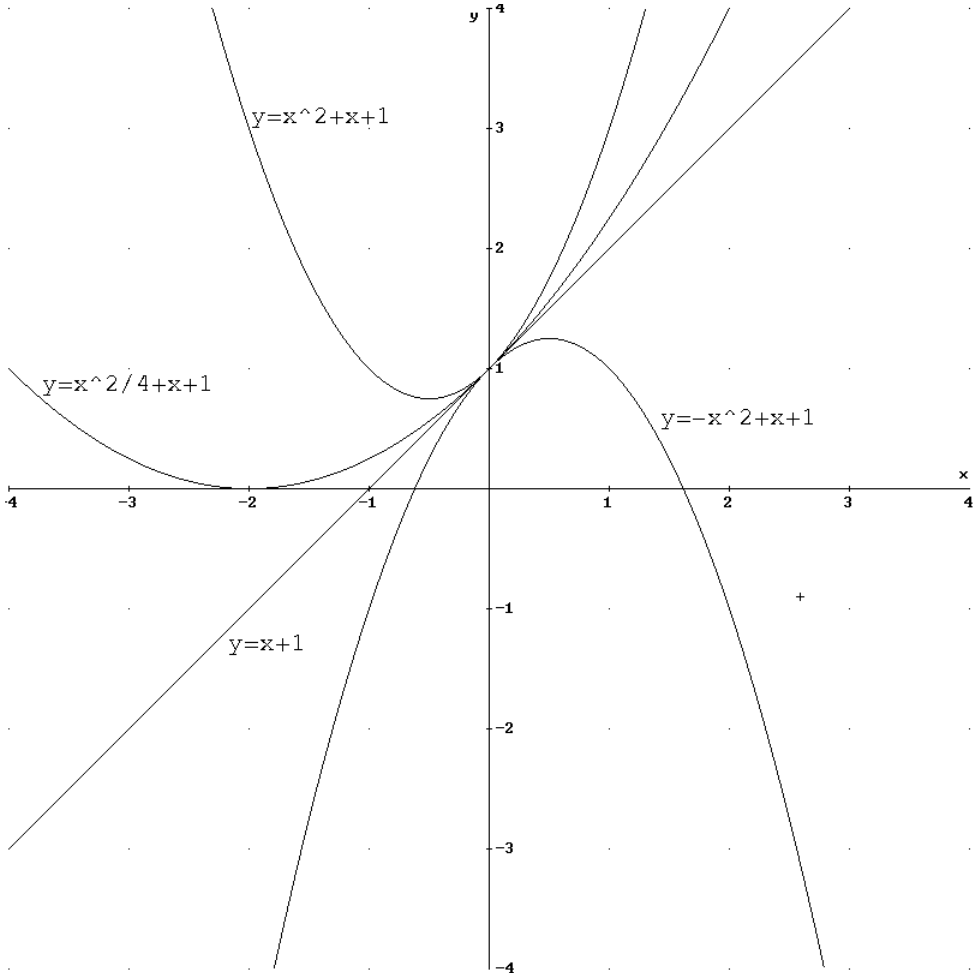
Macerata 6 marzo 2015 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA

SOLUZIONE QUESITO 1

Considera il fascio di parabole di equazione: $y=(k-1)x^2+x+1$
a) Trova eventuali punti base.

$$P(0;1)$$

Le curve sostegno del fascio sono $y=-x^2+x+1$ e $x^2=0$ eventuali punti base scaturiscono dalla soluzione del sistema $\begin{cases} y=-x^2+x+1 \\ x^2=0 \end{cases}$ le cui soluzioni (due coincidenti) sono $P(0;1)$.



b) Trova le parabole degeneri.

$$x=0 \qquad\qquad y=x+1$$

Una parabola degenere è l'asse *y* (di equazione $x = 0$) trovata nel punto precedente. Un'altra la otteniamo ponendo uguale a zero il coefficiente di x^2 dell'equazione del fascio. Si ha k = 1 e la parabola degenere ha equazione $y=x+1$.

c) Studia la concavità delle parabole.

La concavità delle parabole è data dal coefficiente di x^2. Si ha quindi:

se $k-1>0$, ossia $k>1$ le parabole hanno la concavità rivolta verso l'alto;
se $k-1=0$, ossia $k=1$ si ha la parabola degenere data nel punto precedente;
se $k-1<0$, ossia $k<1$ le parabole hanno la concavità rivolta verso il basso.

d) Dimostra che tutte le parabole del fascio sono tangenti in uno stesso punto (trovane le coordinate) alla retta di equazione $x-y+1=0$.

Ricaviamo l'equazione risolvente il sistema e imponiamo che il discriminante sia zero; cioè

$$[1] \qquad \begin{cases} y=(k-1)x^2+x+1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

Ricavando y dalla seconda e sostituendo nella prima otteniamo: $(k-1)x^2+x+1=x+1$ da cui segue l'equazione $(k-1)x^2=0$, nella quale, essendo uguale a zero il coefficiente della x e il termina noto, sia ha $\Delta=0$ per ogni $k\in R$. Ciò dimostra che tutte le parabole del fascio sono tangenti alla retta data. Poiché inoltre tutte le parabole hanno in comune il punto P, questo non può essere altro che il comune punto di tangenza. In maniera alternativa si risolve il sistema [1] ricavando la soluzione $P(0;1)$.

c) Determina per quali valori di *k* le parabole del fascio hanno intersezione con l'asse *x*.

$$k\le\frac{5}{4}$$

Facciamo l'intersezione del fascio di parabole con l'asse *x* e studiamo il segno del discriminante dell'equazione risolvente. Abbiamo:

$$\begin{cases} y=(k-1)x^2+x+1 \\ y=0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è $(k-1)x^2+x+1=0$, da cui $\Delta=1-4(k-1)=5-4k$.

Se $\Delta=5-4k>0$, ossia $k<\frac{5}{4}$ ci sono due intersezioni reali e distinte;

Se $\Delta=5-4k=0$, ossia $k=\frac{5}{4}$ ci sono due intersezioni reali e coincidenti (la parabola corrispondente è tangente all'asse *x*);

Se $\Delta=5-4k<0$, ossia $k>\frac{5}{4}$ non ci sono intersezioni tra le parabole del fascio e l'asse *x*.

d) Trova l'equazione della parabola γ che passa per il punto $D(2;-5)$ e le coordinate dei punti A e B, con $x_A<x_B$, in cui essa interseca l'asse *x*.

$$y=-2x^2+x+1 \qquad A\left(-\frac{1}{2};0\right) \qquad B(1;0)$$

Se la parabola del fascio passa per il punti D, allora le coordinate di questo punto devono soddisfare l'equazione del fascio. Abbiamo:
$-5=(k-1)4+2+1$ che è soddisfatta se $k=-1$ e quindi la parabola di equazione $y=-2x^2+x+1$, le cui intersezioni con l'asse *x* le otteniamo risolvendo l'equazione $-2x^2+x+1=0$, otteniamo: $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$ e $B(1;0)$.

e) Calcola l'area del triangolo ABC, dove C è il punto di intersezione delle tangenti alla parabola γ condotte da A e da B.

$$A(ABC)=\frac{27}{16}$$

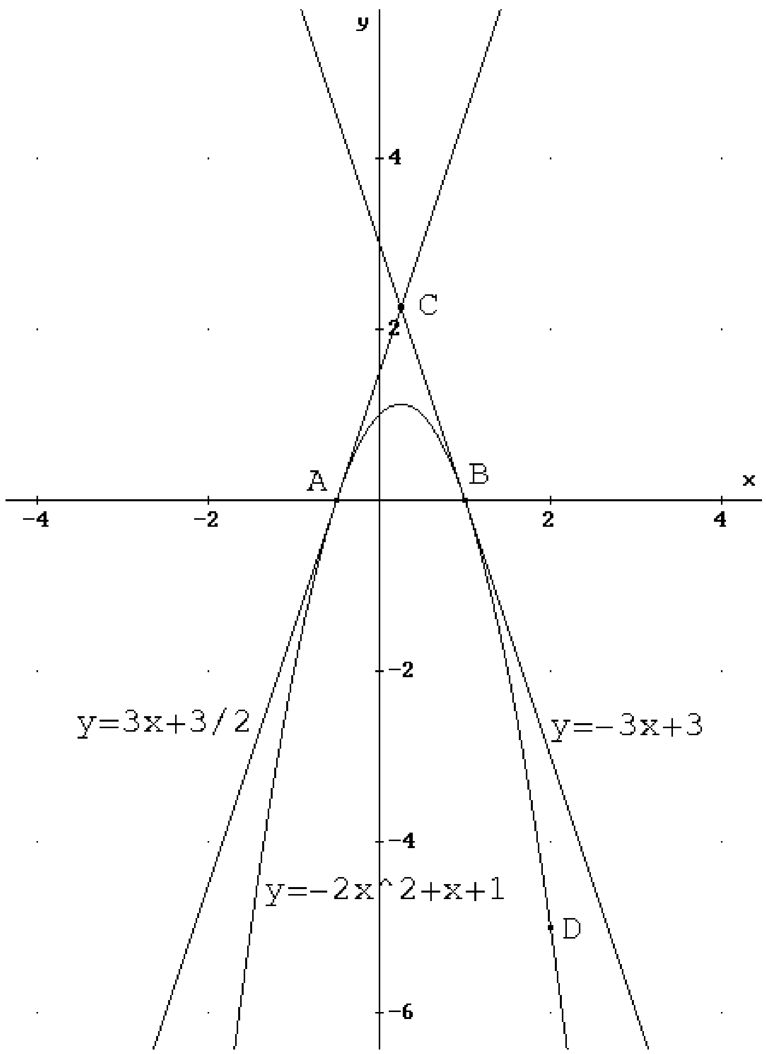
Utilizzando le formule di sdoppiamento, l'equazione della tangente alla parabola in A è data da $\frac{y+0}{2}=-2\left(-\frac{1}{2}x\right)+\frac{-\frac{1}{2}+x}{2}+1$ da cui segue $6x-2y+3=0$.

Sempre con le formule di sdoppiamento, l'equazione della tangente alla parabola in B è data da $\frac{y+0}{2}=-2(1\cdot x)+\frac{1+x}{2}+1$ da cui segue $3x+y-3=0$.

Risolvendo il sistema $\begin{cases}6x-2y+3=0\\3x+y-3=0\end{cases}$ troviamo le coordinate di C che sono $A\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)$.

Come base del triangolo consideriamo il segmento AB che è lungo 3/2 e sta sull'asse x, L'altezza è quindi l'ordinata di C. Abbiamo quindi:

$A(ABC)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot|y_C|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{16}$.



SOLUZIONE QUESITO 2

a) Trova l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse$y$ che ha vertice nel punto $V(2;-3)$ e che passa per l'origine.

$$y=\frac{3}{4}x^2-3x$$

Le condizioni date portano al sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 & x_V=2 \\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-3 & y_V=-3 \\ c=0 & \text{passaggio per } O \end{cases}$$

Per prima cosa sostituiamo c = 0 nella seconda equazione, abbiamo $\begin{cases} b=-4a \\ b^2=12a \\ c=0 \end{cases}$ e risolvendo otteniamo $\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=-3 \\ c=0 \end{cases}$ da cui l'equazione della parabola $y=\dfrac{3}{4}x^2-3x$.

b) Trova i punti A e B in cui la parabola interseca la retta r di equazione $3x+2y-12=0$. Sia $x_A<x_B$.

$$A(-2;9) \qquad B(4;0)$$

Risolviamo il sistema costituito dall'equazione della parabola e da quello della retta

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x^2-3x \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è $x^2-2x-8=0$ le cui soluzioni sono $x=-2$ e $x=4$. I punti cercati sono quindi $A(-2;9)$ e $B(4;0)$.

c) Calcola l'area del segmento parabolico individuato dalla retta r e dalla parabola.

$$A(\text{segmento parabolico})=27$$

L'area del segmento parabolico è 2/3 dell'area del rettangolo che ha come base la corda AB e come altezza la distanza tra la retta r e la parallela ad essa, tangente alla parabola.

Determiniamo tale tangente; scriviamo la retta $r$esplicitando la y, abbiamo: $y=-\dfrac{3}{2}x+6$ per cui la retta parallela ad r e tangente alla parabola avrà equazione del tipo $y=-\dfrac{3}{2}x+q$. Mettiamo a sistema e imponiamo il discriminante dell'equazione risolvente uguale a zero.

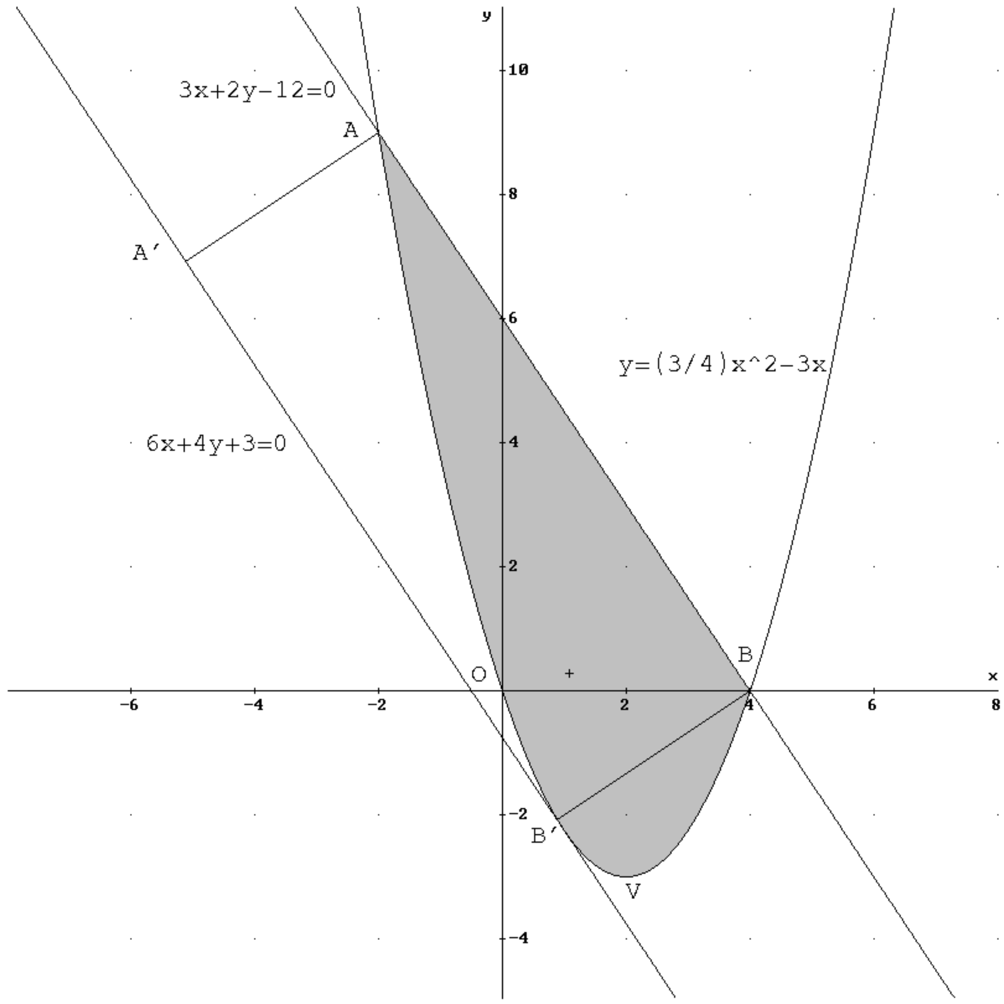
$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x^2-3x \\ y=-\dfrac{3}{2}x+q \end{cases} \Rightarrow 3x^2-6x-4q=0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}=9+12q=0 \Rightarrow q=-\frac{3}{4}.$$

La retta tangente è quindi $y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$ ovvero $6x+4y+3=0$.

Troviamo ora h cioè la distanza di B dalla retta tangente: $h=\frac{|24+3|}{\sqrt{36+16}}=\frac{27}{2\sqrt{13}}$.

Troviamo b, cioè la misura del segmento AB: $b=\sqrt{(-2-4)^2+9^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$.

$A(\text{segmento parabolico})=\frac{2}{3}b\cdot h=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{13}\cdot\frac{27}{2\sqrt{13}}=27$.



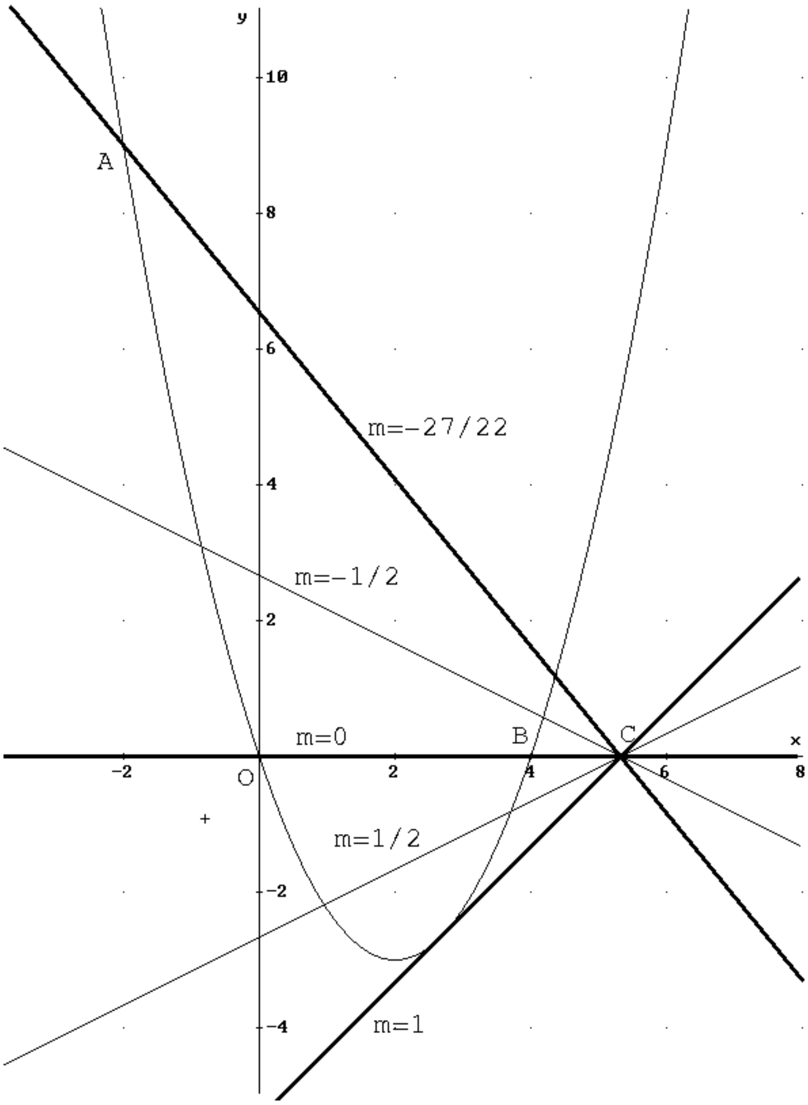
d) Considera il fascio proprio di rette che ha centro nel punto $C\left(\frac{16}{3};0\right)$. Studia le intersezioni tra l'arco di parabola AB e il fascio.

L'equazione del fascio proprio è: $y=m\left(x-\frac{16}{3}\right)$.

Come si può vedere dal grafico le rette che hanno intersezione con l'arco di parabola sono quelle comprese tra la retta che passa per A e la tangente nel punto tra il vertice e B, inoltre quelle comprese tra la retta che passa per B e la tangente hanno due intersezioni (la tangente due coincidenti).
Troviamo quindi il coefficiente angolare della retta che passa per A, per B e la tangente.

Per A: $9=m\left(-2-\frac{16}{3}\right)$ da cui segue $m=-\frac{27}{22}$.

Per B: $0=m\left(4-\frac{16}{3}\right)$ da cui segue $m=0$.



Per la tangente: $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x^2-3x \\ y=m\left(x-\frac{16}{3}\right) \end{cases}$ la cui equazione risolvente è $9x^2-12(3+m)x+64m=0$. Ponendo il discriminante uguale a zero abbiamo $m^2-10m+9=0$ da cui le soluzioni $m=1$ e $m=9$ e le tangenti $y=x-\frac{16}{3}$ e $y=9x-48$.

Per stabilire quale delle due è la tangente nell'arco AB cerchiamo l'ascissa del punto di intersezione; basta sostituire i valori di m nell'equazione risolvente e risolvere. Abbiamo:

per $m=1$, $9x^2-48x+64=0$ ossia $(3x-8)^2=0$ e quindi $x=\frac{8}{3}$;

per $m=9$, $9x^2-144x+576=0$ ossia $9(x-8)^2=0$ e quindi $x=8$.

In conclusione:

- per $-\frac{27}{22}\le m<0$ una sola soluzione;
- per $0\le m\le 1$ due soluzioni e per $m=1$ le soluzioni sono coincidenti;
- per $m<-\frac{27}{22}$ o $m>1$ nessuna soluzione.

Nel grafico in figura sono rappresentare anche le rette che corrispondono a $m=-\frac{1}{2}$ (che ha una sola intersezione) e a $m=\frac{1}{2}$ (che di intersezioni ne ha due).