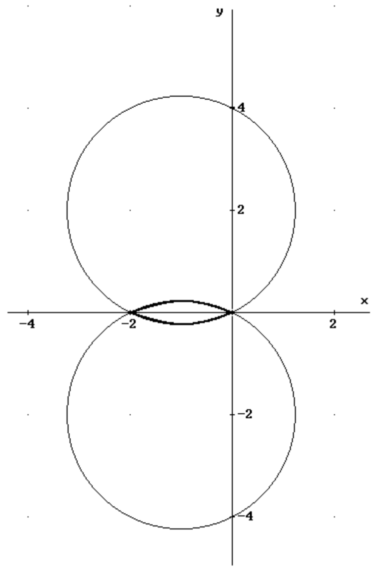
Macerata 6 febbraio 2015 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA – RECUPERO ASSENTI

SOLUZIONE QUESITO 1

a) Rappresenta graficamente la curva descritta dalla seguente equazione: $x^2+y^2+2x+4|y|=0$

Per la presenza del valore assoluto dobbiamo spezzare l'equazione come segue:
- per $y \ge 0$ l'equazione diventa $x^2+y^2+2x+4y=0$ ed è una circonferenza di centro $C^+(-1,-2)$ e raggio $r^+=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$;
- per $y<0$ l'equazione diventa $x^2+y^2+2x-4y=0$ ed è una circonferenza di centro $C^-(-1,2)$ e raggio $r^-=\sqrt{5}$.

Dopo aver disegnato le due circonferenze, prendiamo la parte positiva della prima e quella negativa della seconda. Il grafico richiesto è la parte più marcata nella figura a fianco.

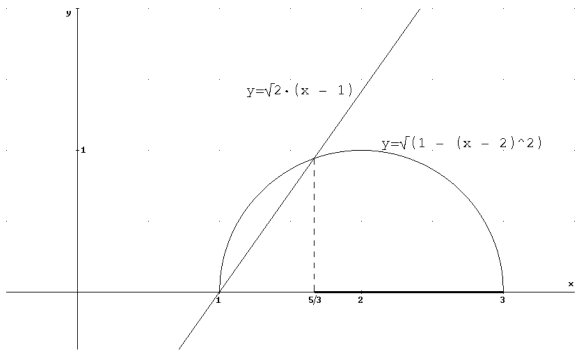


b) Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{1-(x-2)^2}<\sqrt{2}(x-1)$.

$$\frac{5}{3}<x\le 3$$

Poniamo $y=\sqrt{1-(x-2)^2}$ e $y=\sqrt{2}(x-1)$ e rappresentiamo le due curve.

La prima è la parte positiva (al di sopra dell'asse y) della circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x+3=0$, che ha centro nel punto $C(2,0)$ e raggio $r=1$; la seconda è una retta (vedi figura).



Innanzi tutto osserviamo che la disequazione ha senso solo per $1-(x-2)^2 \ge 0$, ossia $1 \le x \le 3$; in questo intervallo entrambe le funzioni hanno senso.

In secondo luogo, risolvere la disequazione significa far vedere per quali valori di *x* il corrispondente valore di *y* calcolato nella prima espressione è minore di quello calcolato con la seconda. In altre parole, quando il grafico della semicirconferenza sta al di sotto del grafico della retta.

Dato che le due curve si intersecano, è necessario calcolare anche l'ascissa del punto di intersezione e per fare ciò bisogna risolvere il sistema $\begin{cases} y=\sqrt{1-(x-2)^2} \\ y=\sqrt{2}(x-1) \end{cases}$ ossia risolvere l'equazione $\sqrt{1-(x-2)^2}=\sqrt{2}(x-1)$. Elevando al quadrato e semplificando si ottiene $3x^2-8x+5=0$ da cui le soluzioni $x=1$ e $x=\frac{5}{3}$. La soluzione della disequazione è quindi $\frac{5}{3}<x\le 3$.

SOLUZIONE QUESITO 2

Considera il fascio di circonferenza di equazione: $x^2+y^2+kx-2(k+1)y+2k-4=0$.
a) Trova, se esistono, i punti base del fascio A e B con $x_A < x_B$, l'asse radicale e l'asse centrale.
Punti base: $A(-2;0)$ e $B(2;2)$ asse radicale $x-2y+2=0$ asse centrale $2x+y-1=0$

Per prima cosa troviamo le circonferenze sostegno del fascio. Si ha:
$x^2+y^2-2y-4+k(x-2y+2)=0$ e quindi le equazioni $x^2+y^2-2y-4=0$ e $x-2y+2=0$.
La prima è una circonferenza di centro $C(0;1)$ e raggio $\sqrt{5}$, la seconda è una retta che passa per i punti $(0;1)$, $(2;0)$ ed è l'asse radicale.
I punti base, se esistono, scaturiscono dall'intersezione delle due curve, ossia dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x^2+y^2-2y-4=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$. Ricavando x dalla seconda e sostituendo nella prima si ha l'equazione di secondo grado in y: $5y^2-10y=0$ le cui soluzioni sono $y=\left\langle \begin{array}{l} y_A=0 \\ y_B=2 \end{array}\right.$. I punti base esistono e sono $A(-2;0)$ e $B(2;2)$.
Dalla definizione le coordinate dei centri sono $C=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{k}{2},(k+1)\right)$. Per trovare l'asse centrale poniamo $\begin{cases} x=-\frac{k}{2} \\ y=k+1 \end{cases}$ ricavando k dalla prima e sostituendo nella seconda si ha $2x+y-1=0$, che è appunto la retta cercata, è infatti perpendicolare all'asse radicale e passa per il centro della circonferenza trovata sopra.
In modo alternativo: il coefficiente angolare della retta perpendicolare all'asse radicale è $m=-2$; l'asse centrale passa per i centri, quindi anche per $C(0;1)$. Si ha $y-1=-2x$.

b) Trova le equazioni delle circonferenze γ_1 e γ_2 del fascio aventi raggio 5. Sia γ_1 la circonferenza con il centro di ascissa negativa.
γ_1: $x^2+y^2+4x-10y+4=0$ γ_2: $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

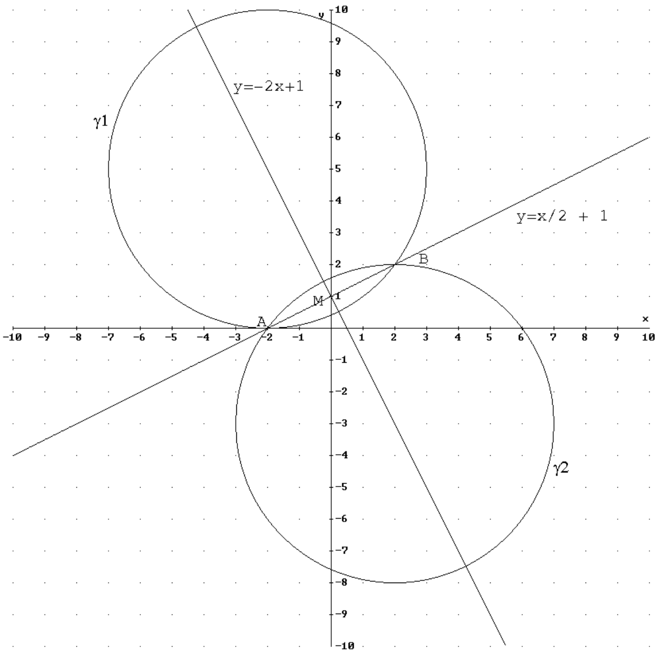
Sempre dalle definizioni $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4(k+1)^2-4(2k-4)}=\frac{1}{2}\sqrt{5k^2+20}$. Le circonferenze esistono per ogni valore di k. Per determinare le circonferenze di raggio 5 dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{1}{2}\sqrt{5k^2+20}=5$. Elevando al quadrato e semplificando abbiamo: $5k^2=80$ da cui $k=\pm 4$ e quindi le circonferenze:
γ_1: $x^2+y^2+4x-10y+4=0$ con centro $C_1(-2;5)$
γ_2: $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ con centro $C_2(2;-3)$

c) Rappresenta γ_1, γ_2, l'asse radicale e l'asse centrale.

Vedi figura punto successivo.

d) Verifica che γ_1 e γ_2 sono simmetriche rispetto al punto medio del segmento AB.

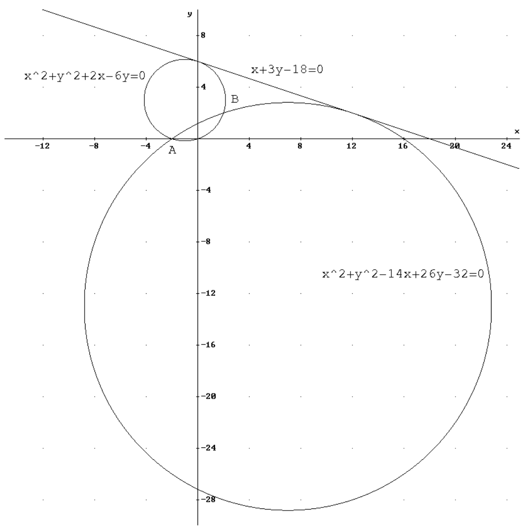
Ricordiamo che due punti $P(x;y)$ e $P'(x';y')$ sono simmetrici rispetto ad un punto $A(a;b)$, se A è il punto medio tra P e P'. Si ricavano pertanto le relazioni $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$ e le loro inverse $\begin{cases} x=2a-x' \\ y=2b-y' \end{cases}$. Troviamo le coordinate del punto medio M del segmento AB: $M=\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)=(0;1)$ (è il centro C della circonferenza base del fascio) le equazioni della simmetria sono quindi $\begin{cases} x=-x' \\ y=2-y' \end{cases}$.



Sostituiamo in γ_1, abbiamo:
$(-x')^2+(2-y')^2+4(-x')-10(2-y')+4=0$.
Sviluppando i calcoli otteniamo: $x'^2+y'^2-4x'+6y'-12=0$ che è γ_2.

e) Trova le equazioni delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $x+3y-18=0$.

Le circonferenze tangenti alla retta data, hanno centri che distano dal centro tanto quanto il raggio. Abbiamo quindi la condizione: $\frac{\left|-\frac{k}{2}+3(k+1)-18\right|}{\sqrt{1+9}}=\frac{1}{2}\sqrt{5k^2+20}$ elevando al quadrato e semplificando si ottiene l'equazione $k^2+12k-28=0$ le cui soluzioni sono k = 2 e k = -14. Le circonferenze hanno quindi equazione: $x^2+y^2+2x-6y=0$ e $x^2+y^2-14x+26y-32=0$.



SOLUZIONE QUESITO 3

a) Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(3;-3)$, $B(6;0)$ e avente il centro sulla retta di equazione $2x+y-6=0$.

Per determinare la circonferenza che passa per i punti *A*, *B*, *D*, utilizziamo la condizione che essi devono soddisfare l'equazione di una circonferenza generica di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Si ha il sistema: $\begin{cases} 13-3a+2b+c=0 \\ 17+4a+b+c=0 \\ 49-7b+c=0 \end{cases}$. Ricavando c dall'ultima equazione e sostituendo nella prima

e nella seconda si ha: $\begin{cases} a-3b+12=0 \\ a+2b-8=0 \\ +c=7b-49 \end{cases}$, da cui $a=0$, $b=4$ e $c=-21$. La circonferenza ha quindi equazione $x^2+y^2+4y-21=0$.

b) Calcola le coordinate del centro *C*, la misura del raggio *r* e disegna la curva.

Il suo centro è $C(0;-2)$ e il raggio è $r=\frac{1}{2}\sqrt{16+84}=5$. Per il grafico vedi figura.

c) Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza condotte dal punto $D(0;3\sqrt{3})$. Disegnale.

Scriviamo l'equazione del fascio di rette con centro $E(1;5)$; si ha: $y=m(x-1)+5$. Imponiamo ora che la distanza dal centro sia uguale al raggio della circonferenza; si ha: $\frac{|7-m|}{\sqrt{m^2+1}}=5$ da cui $|7-m|=5\sqrt{m^2+1}$ elevando al quadrato e semplificando otteniamo

[1] $$12m^2+7m-12=0$$

da cui le soluzioni $m_1=-\frac{4}{3}$ e $m_2=\frac{3}{4}$. La retta *s* ha equazione $3x-4y+17=0$, la retta *t* $4x+3y-19=0$. Vedi figura.

d) Trova le coordinate dei punti di tangenza E, F, con $x_E < x_F$.

La condizione di perpendicolarità tra due rette dice che il prodotto dei coefficienti angolari delle rette deve essere –1. Dalle soluzioni dell'equazione [1] ricaviamo che $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=-1$ e quindi le due tangenti sono perpendicolari.

e) Verifica che il triangolo EFD è equilatero.

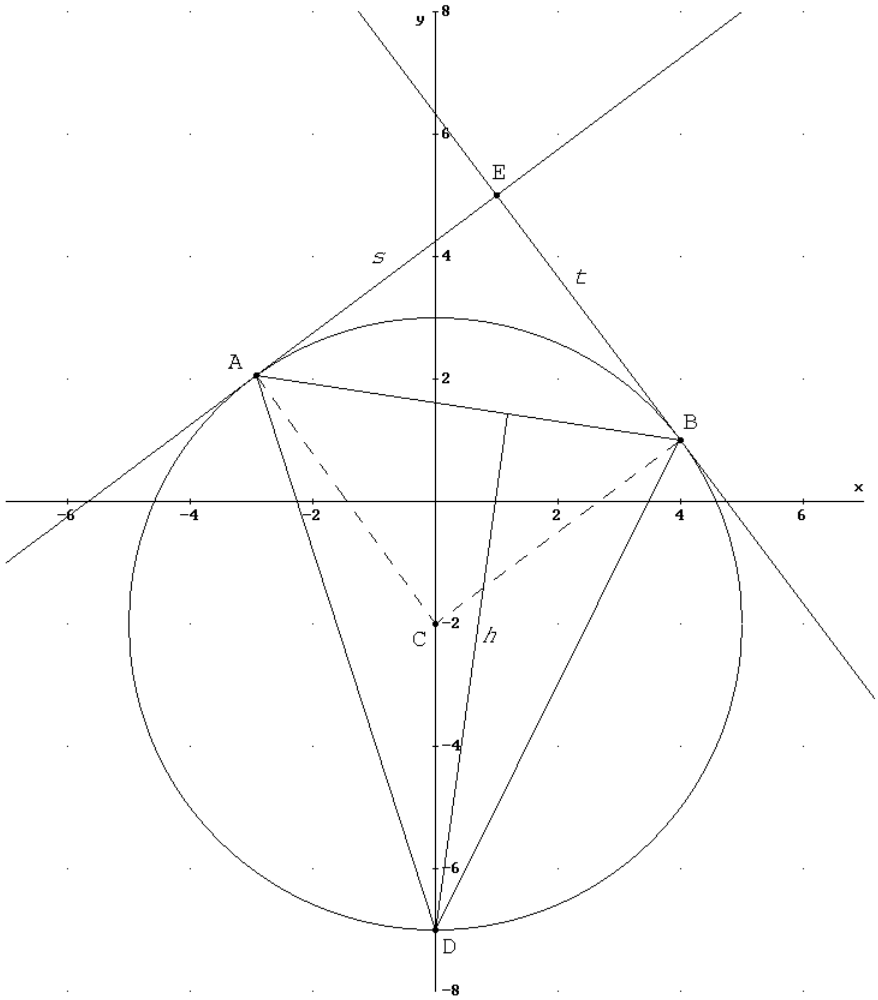
Per verificare che i punti di contatto sono i punti *A* e *B* dati sopra basta far vedere che appartengono alle tangenti. Dal grafico si deduce che *A* deve appartenere alla retta *s* e *B* alla retta *r*. Infatti le coordinate di *A* soddisfano l'equazione della retta *s* $(-9-8+17=0)$ e quelle di *B* l'equazione della retta *r* $(16+3-19=0)$.

f) Trova il numero di intersezioni tra le rette del fascio di centro $P(-2;-3)$ e la semicirconferenza per la quale si ha $y \geq 0$, al variare del coefficiente angolare *m* delle rette.

Possiamo vedere il quadrilatero *AEBD* costituito dal triangolo AEB e dal triangolo ABD, entrambi sulla base AB. Osserviamo che il quadrilatero *AEBC* è un quadrato di lato 5, infatti ha tutti e quattro gli angoli retti ($\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono retti perché il raggio di una circonferenza è perpendicolare alla tangente, $\hat{E}$ è retto per quanto dimostrato nel punto d, $\hat{C}$ in quanto la somma degli angoli interni di un quadrilatero è sempre 360°) e i quattro lati sono uguali ($\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BE}}$ perché segmenti di tangenza, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ perché raggi della circonferenza, inoltre $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{(-3-1)^2+(2-5)^2}=5=\overline{\mathrm{AC}}$). L'area del triangolo $A_{\mathrm{AEB}}=\frac{25}{2}$.

Per determinare l'area del triangolo ABD dobbiamo trovare l'altezza *h* relativa alla base AB (che essendo la diagonale del quadrato *AEBC* è lunga $5\sqrt{2}$) che altro non è che la distanza del punto *D* dalla retta che contiene *AB*. La retta che contiene *AB* ha equazione $x+7y-11=0$ e quindi $h=\frac{|-49-11|}{5\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$. $A_{\mathrm{ABD}}=\frac{1}{2}h\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot(6\sqrt{2})(5\sqrt{2})=30$.

$A_{\mathrm{AEBD}}=A_{\mathrm{AEB}}+A_{\mathrm{ABD}}=\frac{25}{2}+30=\frac{85}{2}$.


y
8
6
E
s
4
t
A
2
B
x
-6
-4
-2
2
4
6
C
-2
h
-4
-6
D
-8