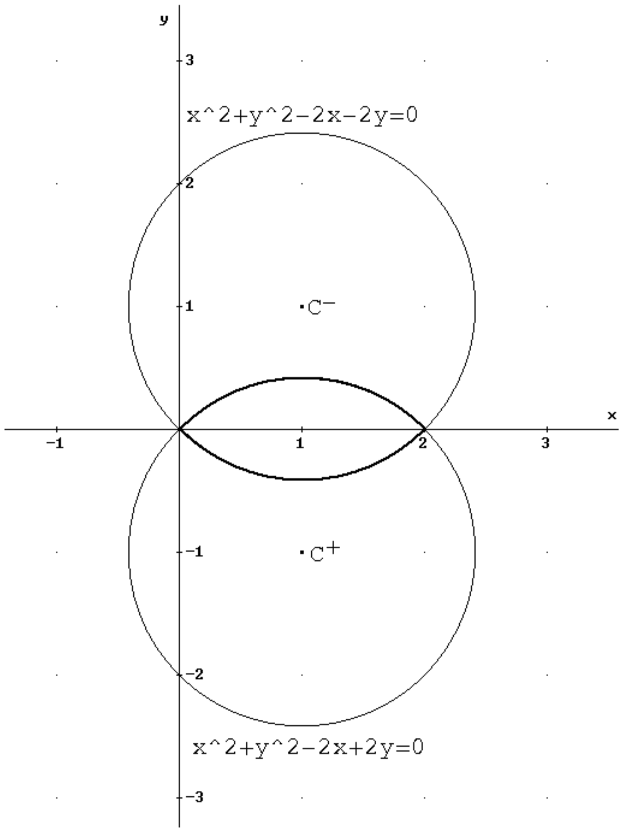
Macerata 3 febbraio 2015 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA

SOLUZIONE QUESITO 1

a) Rappresenta graficamente la curva descritta dalla seguente equazione: $x^2+y^2-2x+2|y|=0$

Per la presenza del valore assoluto dobbiamo spezzare l'equazione come segue:
- per $y \geq 0$ l'equazione diventa $x^2+y^2-2x+2y=0$ ed è una circonferenza di centro $C^+(1,-1)$ e raggio $r^+=\sqrt{2}$;
- per $y<0$ l'equazione diventa $x^2+y^2-2x-2y=0$ ed è una circonferenza di centro $C^-(1,1)$ e raggio $r^-=\sqrt{2}$.

Dopo aver disegnato le due circonferenze, prendiamo la parte positiva della prima e quella negativa della seconda. Il grafico richiesto è la parte più marcata nella figura a fianco.



b) Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{-x^2-4x} \geq \frac{x}{2}+2$.

$$-4 \leq x \leq -\frac{4}{5}$$

Poniamo $y=\sqrt{-x^2-4x}$ e $y=\frac{x}{2}+2$ e rappresentiamo le due curve.

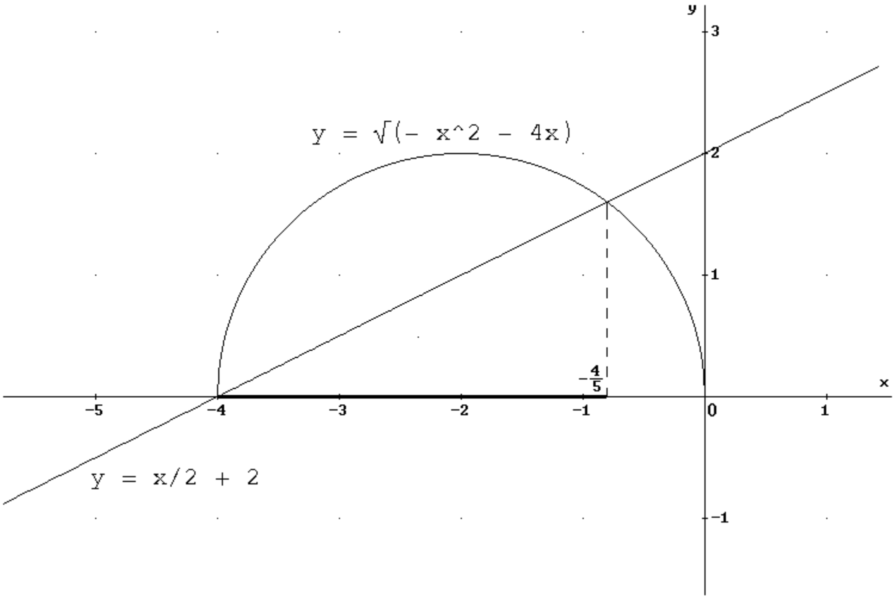
La prima è la parte positiva (al di sopra dell'asse y) della circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x=0$, che ha centro nel punto $C(-2,0)$ e raggio $r=2$; la seconda è una retta (vedi figura).

Innanzi tutto osserviamo che la disequazione ha senso solo per $-4 \leq x \leq 0$ in quanto solo in questo intervallo entrambe le funzioni hanno senso.

In secondo luogo, risolvere la disequazione significa far vedere per quali valori di x il corrispondente valore di y calcolato nella prima espressione è maggiore di quello calcolato con la seconda. In altre parole, quando il grafico della semicirconferenza sta al di sopra del grafico della retta (o coincidono, visto che c'è anche l'uguale)

Dato che le due curve si intersecano, è necessario calcolare anche l'ascissa del punto di intersezione e per fare ciò bisogna risolvere il sistema $\begin{cases} y=\sqrt{-x^2-4x} \\ y=\frac{x}{2}+2 \end{cases}$ ossia risolvere l'equazione

$\sqrt{-x^2-4x}=\frac{x}{2}+2$. Elevando al quadrato e semplificando si ottiene $5x^2+24x+16=0$ da cui le soluzioni $x=-4$ e $x=-\frac{4}{5}$. La soluzione della disequazione è quindi $-4\le x\le -\frac{4}{5}$.



SOLUZIONE QUESITO 2

Considera il fascio di circonferenza di equazione: $x^2+y^2+(k-4)x-ky+k-5=0$. a) Scrivi le coordinate dei centri al variare di *k*. $C\left(\frac{4-k}{2},\frac{k}{2}\right)$

Dalla definizione le coordinate dei centri sono $C=\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{4-k}{2},\frac{k}{2}\right)$.

b) Scrivi la misure del raggio al variare di *k* e trova eventuali valori di *k* per i quali le circonferenze non esistono. $r=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(k^2-6k+18\right)}$

Sempre dalle definizioni $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(k-4)^2+(-k)^2-4(k-5)}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(k^2-6k+18\right)}$.
Le circonferenze esistono se r esiste e quindi se il radicando dell'espressione ora trovata è positivo, ossia quando $k^2-6k+18>0$. Questa è una disequazione di secondo grado con il coefficiente di k^2 e il discriminate entrambi positivi, quindi è soddisfatta per ogni valore di k. Le circonferenze esistono per ogni valore di *k*.

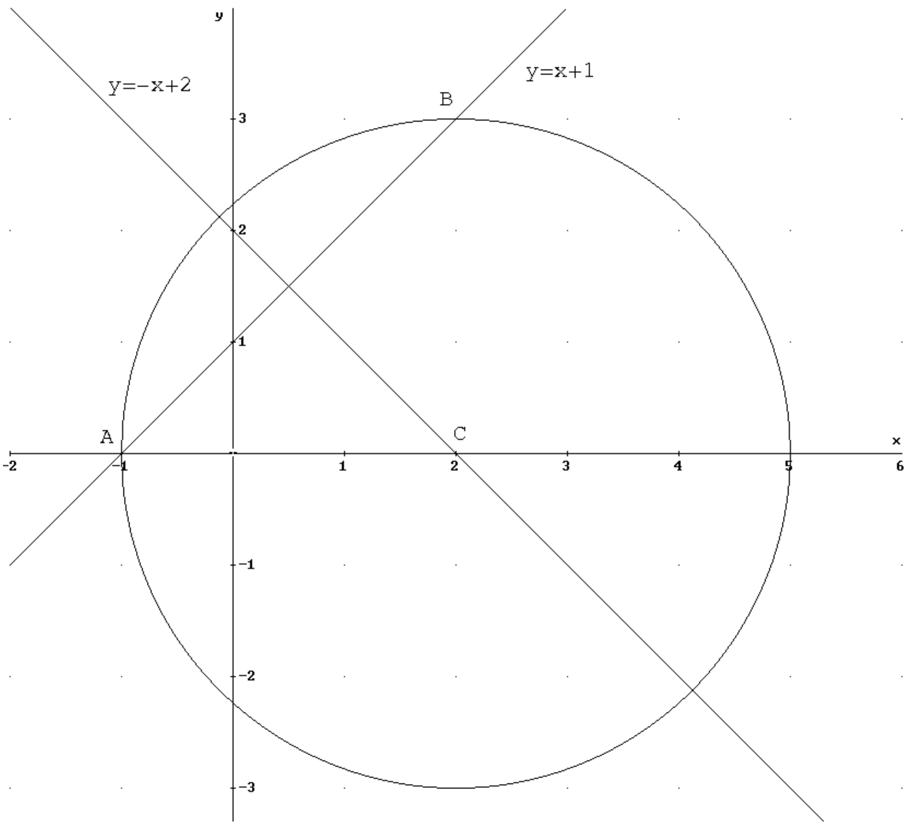
c) Trova, se esistono, i punti base del fascio *A* e *B* con $x_A<x_B$. $A(-1;0)$ e $B(2;3)$

Per prima cosa trovaimo le circonferenze sostegno del fascio. Si ha:
$x^2+y^2-4x-5+k(x-y+1)=0$ e quindi le equazioni $x^2+y^2-4x-5=0$ e $x-y+1=0$.

La prima è una circonferenza di centro $C(2;0)$ e raggio 3, la seconda è una retta parallela alla bisettrice del I e III quadrante ed è l'asse radicale.
I punti base, se esistono, scaturiscono dall'intersezione delle due curve, ossia dalla risoluzione del sistema $\begin{cases} x^2+y^2-4x-5=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$. Ricavando y dalla seconda e sostituendo nella prima si ha l'equazione di secondo grado in x: $x^2-x-2=0$ le cui soluzioni sono $x=\langle \begin{matrix} x_A=-1 \\ x_B=2 \end{matrix}$. I punti base esistono e sono $A(-1;0)$ e $B(2;3)$.

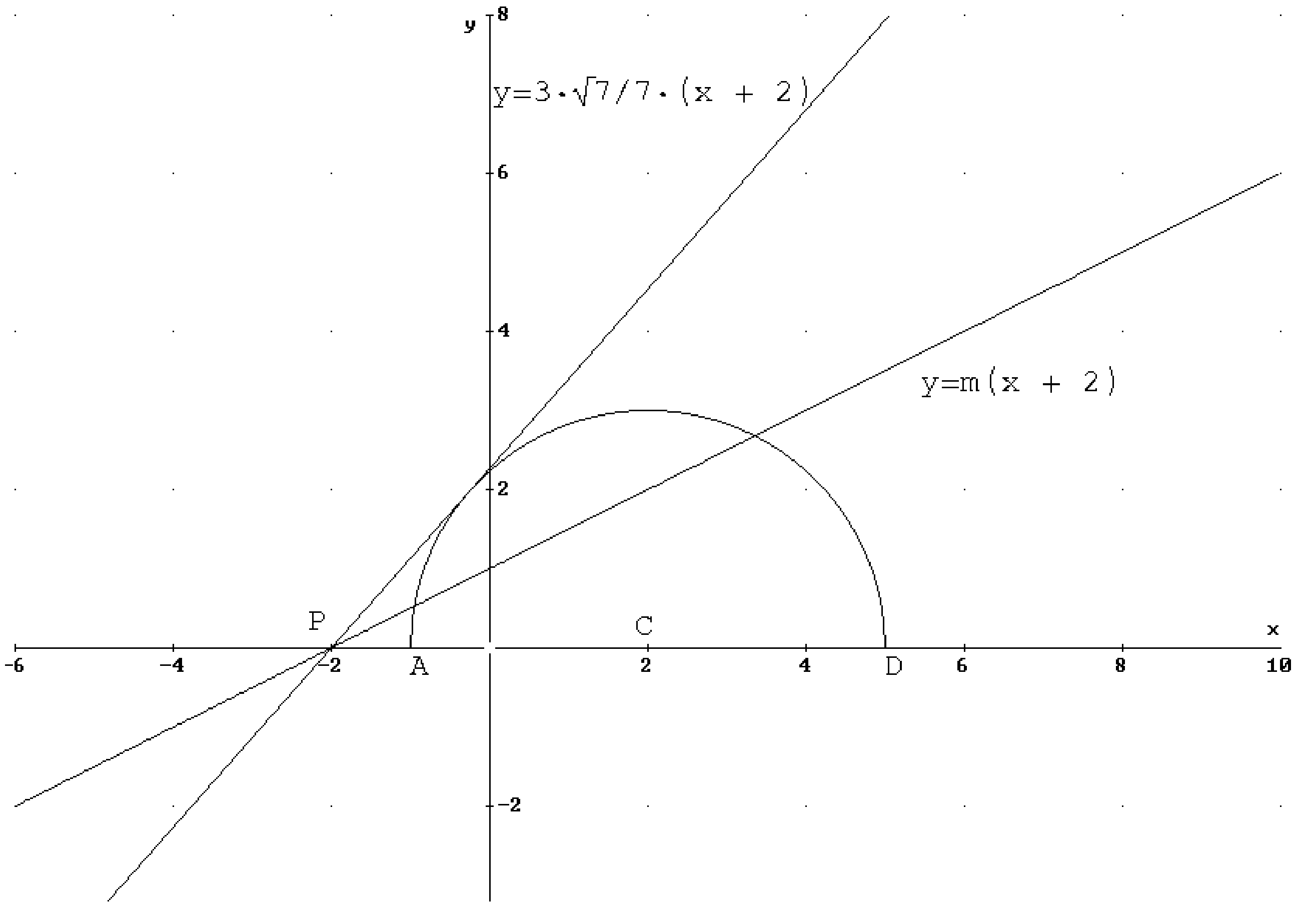
d) Trova, se esistono, le equazioni dell'asse radicale r e dell'asse centrale t. $r)\ y=x+1 \qquad t)\ y=-x+2$.

L'asse radicale l'abbiamo trovato nel punto precedente: $r)\ y=x+1$.
Per trovare l'asse centrale possiamo procedere in diversi modi, ne metteremo in evidenza due.
PRIMO MODO. Sappiamo, per definizione, che l'asse centrale è perpendicolare all'asse radicale e contiene tutti i centri delle circonferenze, in particolare contiene il centro della circonferenza sostegno del fascio (che corrisponde a k = 0). Si tratta quindi di trovare la retta perpendicolare a r (e quindi una parallela alla bisettrice del II e IV quadrante) che passa per C. L'equazione è: $y-y_C=m(x-x_C)$ e quindi $y=-x+2$.
SECONDO MODO. Se indichiamo con $(x;y)$ le coordinate del generico centro, si ha che $\begin{cases} x=\dfrac{4-k}{2} \\ y=\dfrac{k}{2} \end{cases}$ ricavando k dalla seconda, sostituendo nella prima e semplificando, si ottiene: $y=-x+2$ che è appunto il luogo dei punti del piano cui appartengono tutti i centri.



e) Considera ora la parte non negativa $(y \geq 0)$ della circonferenza che corrisponde a $k = 0$ e il punto $P(-2;0)$. Trova il numero di intersezioni tra il fascio di rete che passa per P e la semicirconferenza al variare del coefficiente angolare, m, della retta.

Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro P; si ha: $y - y_P = m(x - x_P)$, ossia $y = m(x+2)$. La parte della semicirconferenza non negativa ha equazione $y = \sqrt{5+4x-x^2}$. La circonferenza interseca l'asse x nei punti $A(-1;0)$ e $D(5;0)$. Troviamo ora i valori di m per i quali la retta passa per A, per D ed è tangente alla semicirconferenza (vedi figura). Abbiamo:
Passaggio per $A(-1;0)$; sostituendo le coordinate di A nell'equazione del fascio si ha $m = 0$.
Passaggio per $D(5;0)$; sostituendo le coordinate di D nell'equazione del fascio si ha $m = 0$.
D'altra parte i tre punti A, D, P stanno sull'asse x, quindi per essi passa la retta per la quale $m = 0$.
Per trovare il coefficiente angolare della retta tangente imponiamo che la distanza dal centro sia uguale al raggio della circonferenza. Si ha:
$\frac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$ da cui $|4m| = 3\sqrt{m^2+1}$ elevando al quadrato e semplificando otteniamo $7m^2 - 9 = 0$ da cui le soluzioni $m = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3\sqrt{7}}{7} \\ -\frac{3\sqrt{7}}{7} \end{array} \right.$. La soluzione accettabile è la prima in quanto è positiva e la retta tangente cercata deve avere coefficiente angolare positivo.



Abbiamo quindi:

Per $m < 0$ o $m > \frac{3\sqrt{7}}{7}$ NESSUNA soluzione (le rette del fascio non intersecano la semicirconferenza)

Per $0 \le m \le \frac{3\sqrt{7}}{7}$ DUE soluzioni; per m = 0 le due soluzioni sono i punti A e D, per $m = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ le due soluzioni sono coincidenti.

SOLUZIONE QUESITO 3

a) Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-3;2)$, $B(4;1)$ e $D(0,-7)$. $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$

Per determinare la circonferenza che passa per i punti *A*, *B*, *D*, utilizziamo la condizione che essi devono soddisfare l'equazione di una circonferenza generica di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Si ha il sistema: $\begin{cases} 13 - 3a + 2b + c = 0 \\ 17 + 4a + b + c = 0 \\ 49 - 7b + c = 0 \end{cases}$. Ricavando c dall'ultima equazione e sostituendo nella prima

e nella seconda si ha: $\begin{cases} a - 3b + 12 = 0 \\ a + 2b - 8 = 0 \\ +c = 7b - 49 \end{cases}$, da cui $a = 0$, $b = 4$ e $c = -21$. La circonferenza ha quindi

equazione $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$.

b) Calcola le coordinate del centro *C*, la misura del raggio *r* e disegna la curva. $C(0;-2) \qquad r = 5$

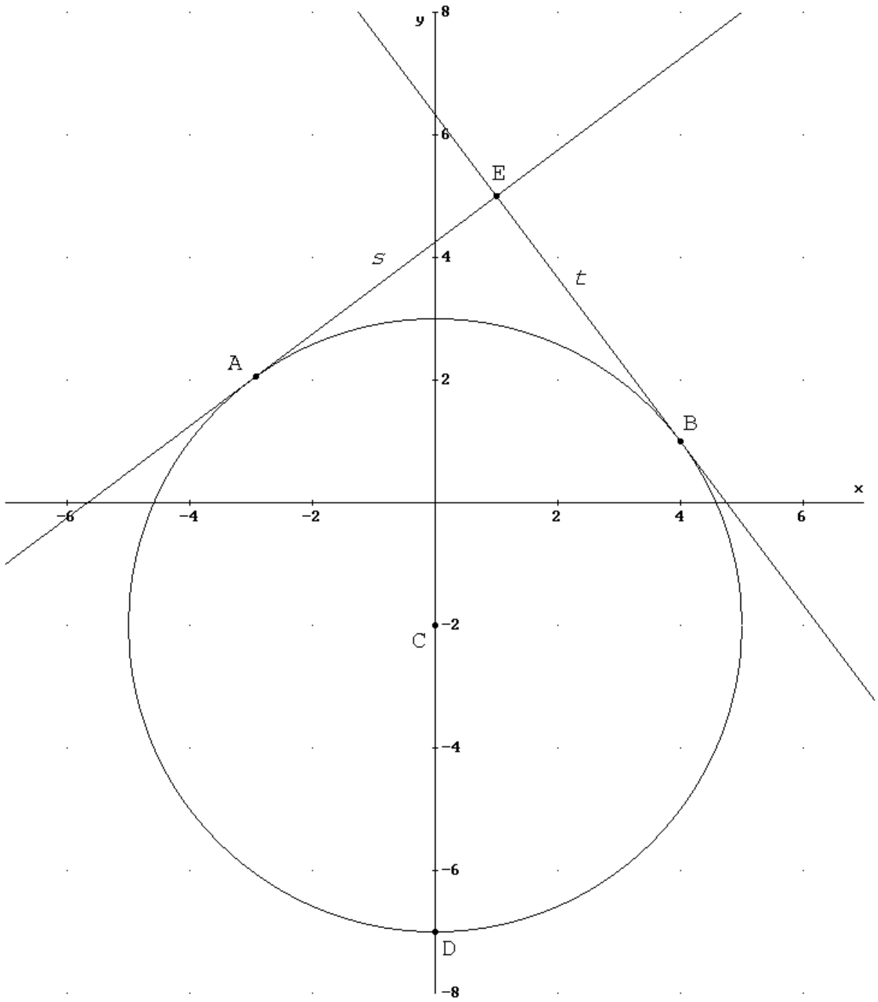
Il suo centro è $C(0;-2)$ e il raggio è $r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 84} = 5$. Per il grafico vedi figura.

c) Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza condotte dal punto $E(1;5)$ (sia *s* è quella con coefficiente angolare positivo e *t* l'altra). Disegnale. $s) \quad 3x - 4y + 17 = 0 \qquad t) \quad 4x + 3y - 19 = 0$

Scriviamo l'equazione del fascio di rette con centro $E(1;5)$; si ha: $y = m(x-1) + 5$. Imponiamo ora che la distanza dal centro sia uguale al raggio della circonferenza; si ha: $\frac{|7-m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$ da cui $|7 - m| = 5\sqrt{m^2+1}$ elevando al quadrato e semplificando otteniamo

[1] $$12m^2 + 7m - 12 = 0$$

da cui le soluzioni $m_1 = -\frac{4}{3}$ e $m_2 = \frac{3}{4}$. La retta *s* ha equazione $3x - 4y + 17 = 0$, la retta *t* $4x + 3y - 19 = 0$. Vedi figura.



d) Verifica che tali tangenti sono perpendicolari.

La condizione di perpendicolarità tra due rette dice che il prodotto dei coefficienti angolari delle rette deve essere –1. Dalle soluzioni dell'equazione [1] ricaviamo che $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = -1$ e quindi le due tangenti sono perpendicolari.

e) Verifica che i punti di contatto sono i punti *A* e *B* dati sopra.

Per verificare che i punti di contatto sono i punti *A* e *B* dati sopra basta far vedere che appartengono alle tangenti. Dal grafico si deduce che *A* deve appartenere alla retta *s* e *B* alla retta *r*. Infatti le coordinate di *A* soddisfano l'equazione della retta *s* $(-9-8+17=0)$ e quelle di *B* l'equazione della retta *r* $(16+3-19=0)$.

f) Calcola l'area del quadrilatero *AEBD*. $$A_{\text{AEBD}} = \frac{85}{2}$$

Possiamo vedere il quadrilatero *AEBD* costituito dal triangolo AEB e dal triangolo ABD, entrambi sulla base AB. Osserviamo che il quadrilatero *AEBC* è un quadrato di lato 5, infatti ha tutti e quattro gli angoli retti ($\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono retti perché il raggio di una circonferenza è perpendicolare alla tangente, $\hat{E}$ è retto per quanto dimostrato nel punto d, $\hat{C}$ in quanto la somma degli angoli interni di un quadrilatero è sempre 360°) e i quattro lati sono uguali ($\overline{AE}=\overline{BE}$ perché segmenti di tangenza, $\overline{AC}=\overline{BC}$ perché raggi della circonferenza, inoltre $\overline{AE}=\sqrt{(-3-1)^2+(2-5)^2}=5=\overline{AC}$). L'area del triangolo $A_{AEB}=\frac{25}{2}$.

Per determinare l'area del triangolo *ABD* dobbiamo trovare l'altezza *h* relativa alla base *AB* (che essendo la diagonale del quadrato *AEBC* è lunga $5\sqrt{2}$) che altro non è che la distanza del punto *D* dalla retta che contiene *AB*. La retta che contiene *AB* ha equazione $x+7y-11=0$ e quindi $h=\frac{|-49-11|}{5\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$. $A_{ABD}=\frac{1}{2}h\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot\left(6\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}\right)=30$.

$A_{AEBD}=A_{AEB}+A_{ABD}=\frac{25}{2}+30=\frac{85}{2}$.