Macerata 19 dicembre 2014 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA – RECUPERO ASSENTI

SOLUZIONE QUESITO 1

In un riferimento cartesiano ortogonale è dato il fascio di rette:

$$(2k+1)x-(k-1)y+3(k+1)=0 .$$

Determina il centro C del fascio. $\mathrm{C}(-2;\ -1)$

Sviluppando l'equazione del fascio si ottiene $x+y+3+k(2x-y+3)=0$ il centro è dato dalla soluzione del sistema $\begin{cases} x+y+3=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$. Il modo più immediato per trovare la soluzione consiste nel sommare membro a membro; si ha $\mathrm{C}(-2;\ -1)$.

Trova la retta *r* che corrisponde a *k* = 0 e la retta *s* cui non corrisponde alcun valore di *k*.

$r)\ x+y+3=0$ $\qquad$ $s)\ 2x-y+3=0$

Ponendo *k* = 0 nell'equazione del fascio $x+y+3+k(2x-y+3)=0$ si ottiene la retta *r*. La retta *s* è $2x-y+3=0$

Determina per quali valori di *k* le rette del fascio formano con la direzione positiva dell'asse delle *x* un angolo α tale che $0<\alpha<45°$.

$$-2<k<-\frac{1}{2}$$

Se l'angolo deve essere $0<\alpha<45°$, allora il coefficiente angolare *m* delle rette del fascio deve essere $0<m<1$. $m=\dfrac{2k+1}{k-1}$, bisogna quindi risolvere il sistema di disequazioni $\begin{cases} \dfrac{2k+1}{k-1}>0 \\ \dfrac{2k+1}{k-1}<1 \end{cases}$. La soluzione è $-2<k<-\dfrac{1}{2}$.

Sia A il punto in cui la retta *r* incontra l'asse delle ordinate; determina l'equazione della retta *t* passante per A e parallela alla retta *s*. Sia B il punto in cui *t* interseca l'asse delle ascisse.

A(0, – 3) $\qquad$ $t)\ 2x-y-3=0$ $\qquad$ $\mathrm{B}=\left(\dfrac{3}{2};\ 0\right)$

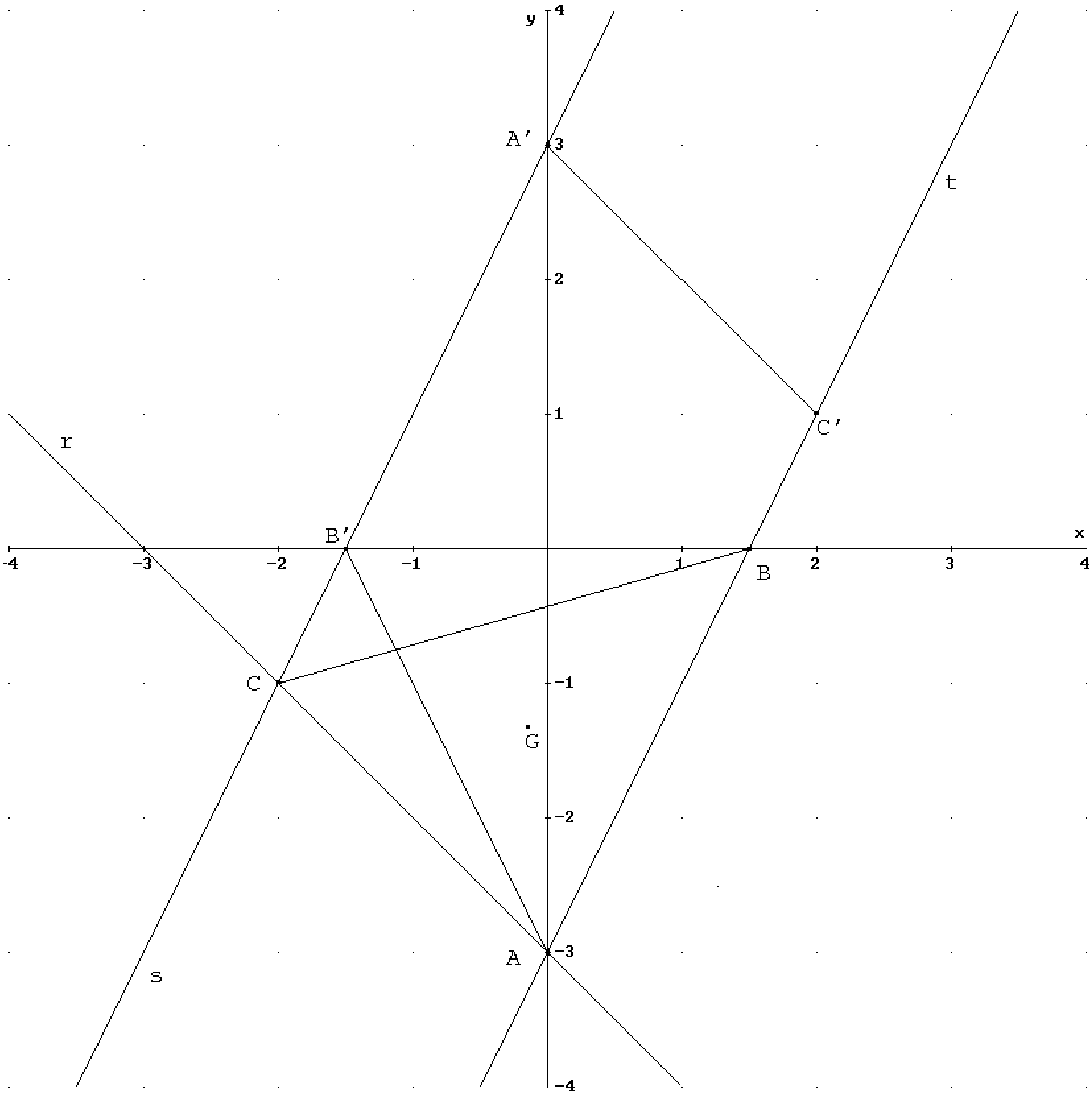
Le coordinate del punto A= $\begin{cases} x+y+3=0 \\ x=0 \end{cases}$ da cui A(0, – 3). Il coefficiente angolare della retta s è 2, quindi l'equazione della retta t si ricava da $y+3=2(x-0)$ ossia $t)\ 2x-y-3=0$. Le coordinate di B si ottengono dalla soluzione del sistema B= $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ y=0 \end{cases}$ da cui $\mathrm{B}=\left(\dfrac{3}{2};\ 0\right)$.

Trova il baricentro G del triangolo ABC. $\qquad G=\left(-\frac{1}{6};-\frac{4}{3}\right)$

Le coordinate del baricentro $G=(x_G;y_G)$ sono date da:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{0+\frac{3}{2}-2}{3}=-\frac{1}{6} \qquad \text{e} \qquad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-3+0-1}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Trova quindi i punti A', B' e C' simmetrici di A, B, C rispetto all'origine; dimostra che il quadrilatero AC'A'C è un parallelogramma e trova l'area del triangolo AB'C. $A'(0;\,3) \qquad B'\left(-\frac{3}{2};\,0\right) \qquad C'(2;\,1) \qquad \mathcal{A}(AB'C)=\frac{3}{2}$



Ricordiamo che il simmetrico rispetto all'origine di un punto $P(x;y)$ è il punto $P'(-x;-y)$.

Pertanto: $A'(0;\ 3)$, $B'\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$ e $C'(2;\ 1)$.

Un quadrilatero è un parallelogramma se ha i lati opposti paralleli.
Si dimostra facilmente che $A'\in s$, $B'\in s$ e $C'\in t$ (basta sostituire le coordinate dei punti nelle equazioni delle rette) ed essendo *s* e *t* parallele, il lati CA' e AC' sono paralleli. Facciamo vedere che la retta che passa per A'C' è parallela ad *r*. Tale retta ha equazione $x+y-3=0$ che ha lo stesso coefficiente angolare di r e quindi le due rette sono parallele. Quindi anche CA e C'A' sono paralleli.
Per determinare l'area del triangolo AB'C osserviamo che l'altezza *h* relativa alla base B'C, altro non è che la distanza di A dalla retta *s*. Quindi:

$$\overline{B'C}=\sqrt{\left(x_{B'}-x_C\right)^2+\left(y_{B'}-y_C\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$h=d\,(A,s)=\frac{\left|2\cdot 0-1\cdot(-3)+3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Da cui segue che l'area è $A(AB'C)=\frac{\overline{B'C}\cdot h}{2}=\frac{3}{2}$.

SOLUZIONE QUESITO 2

In un riferimento cartesiano ortogonale è dato il punto $A(-1;-1)$. Scrivi l'equazione del fascio di rette di centro A.

$$mx-y+m-1=0$$

L'equazione del fascio è data da

$$y-y_A=m(x-x_A) \quad \Rightarrow \quad y+1=m(x+1) \quad \Rightarrow \quad mx-y+m-1=0$$

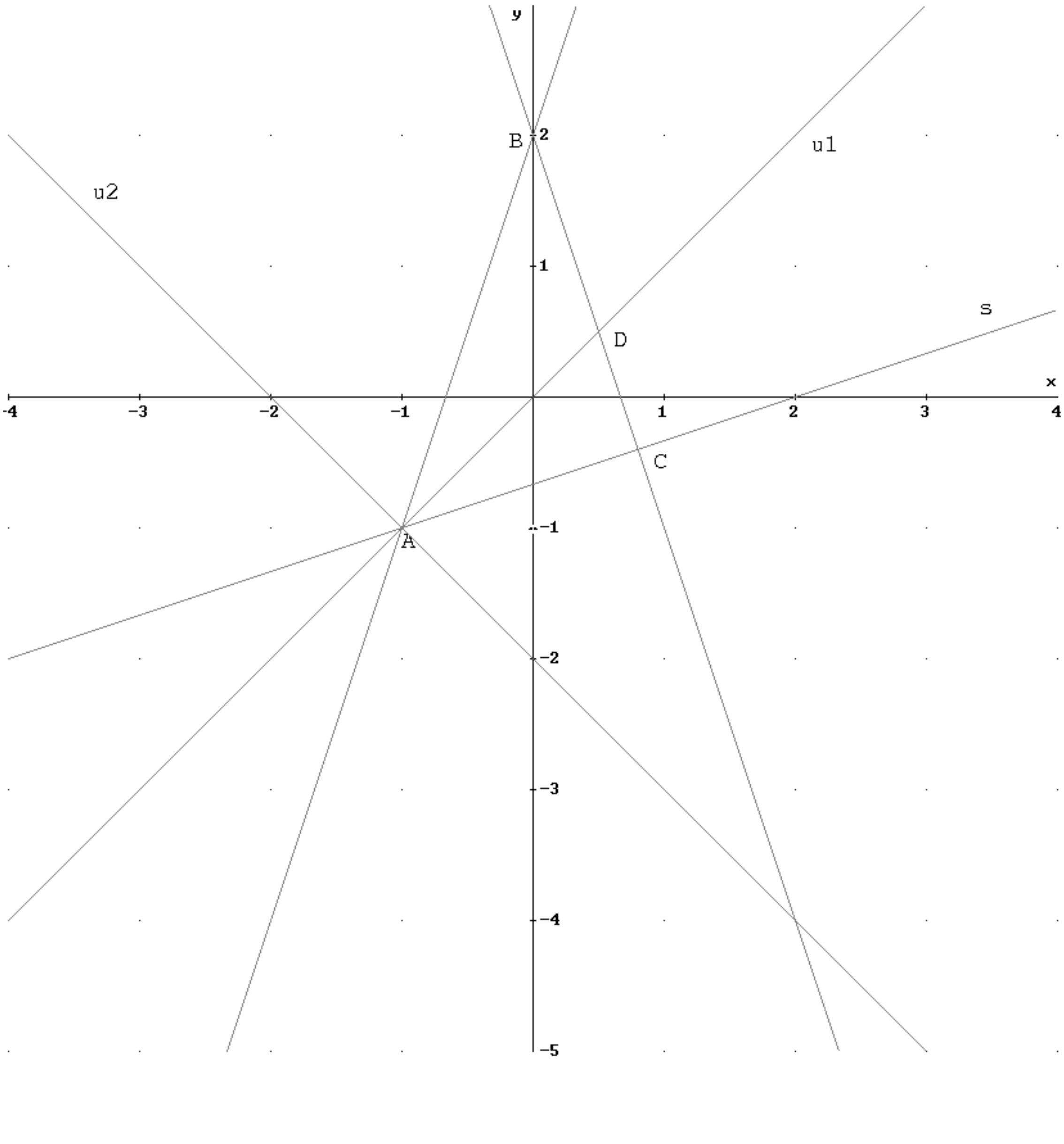
Trova l'equazione della retta *r* del fascio che passa per $B(0;2)$.

$$r)\ 3x-y+2=0$$

La retta cercata passa per A e per B, quindi la sua equazione si ricava da:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{y+1}{2+1}=\frac{x+1}{0+1}$$

la retta cercata ha equazione $3x-y+2=0$.



Trova la retta t, simmetrica della retta r rispetto all'asse parallelo all'asse x passante per B. $t)\ \ 3x+y-2=0$

Una simmetria assiale con asse parallelo all'asse x, di equazione $y=b$, è data da: $\begin{cases} x'=x \\ y'=2b-y \end{cases}$ e quindi le equazioni della trasformazione sono $\begin{cases} x'=x \\ y'=4-y \end{cases}$. Se $\mathrm{P}(x;y)$ è un punto della retta r e $\mathrm{P}'(x';y')$ il suo simmetrico rispetto a $y=2$, allora, sostituendo in r ad x e y le loro espressioni $\begin{cases} x=x' \\ y=4-y' \end{cases}$ si ha: $3x'-(4-y)+2=0$ da cui segue $3x'+y'-2=0$ e quindi la retta t ha equazione $3x+y-2=0$.

Determina l'equazione della retta s del fascio perpendicolare alla retta t e indica con C il punto di intersezione tra s e t. $s)\ \ x-3y-2=0$ $\qquad$ $\mathrm{C}\left(\frac{4}{5};\ -\frac{2}{5}\right)$

La retta del fascio perpendicolare alla retta t ha coefficiente angolare $m=\frac{1}{3}$ e ovviamente passa per A, l'equazione è quindi $y+1=\frac{1}{3}(x+1)$, da cui $x-3y-2=0$.

Scrivi le equazioni delle bisettrici u_1 e u_2 degli angoli formati dalle rette r e s . Sia u_1 quella che intercetta il segmento BC e sia D il punto di intersezione. $u_1)\ \ x-y=0$ $\qquad$ $u_2)\ \ x+y+2=0$ $\qquad$ $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$

Dalla definizione di bisettrice come luogo geometrico dei punti $\mathrm{P}(x;y)$ del piano equidistati dalle rette che costituiscono i lati dell'angolo, si ha:

$$d(\mathrm{P},r)=\frac{|ax_{\mathrm{P}}+by_{\mathrm{P}}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}} \qquad \text{e} \qquad d(\mathrm{P},s)=\frac{|a'x_{\mathrm{P}}+b'y_{\mathrm{P}}+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=\frac{|x-3y-2|}{\sqrt{10}}$$

Uguagliando:

$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|x-3y-2|}{\sqrt{10}}$ da cui $|3x-y+2|=|x-3y-2|$, quindi $3x-y+2=\pm(x-3y-2)$ si hanno quindi le due equazioni:

$$3x-y+2=x-3y-2 \quad \Rightarrow \quad 2x+2y+4=0 \quad \Rightarrow \quad x+y+2=0$$
$$3x-y+2=-(x-3y-2) \quad \Rightarrow \quad 4x-4y=0 \quad \Rightarrow \quad x-y=0$$

La seconda è la bisettrice del primo e terzo quadrante e quindi quella che interseca il segmento BC nel punto $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ le cui coordinate si determinano risolvendo il sistema $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases}$.

Calcola il rapporto R tra l'area del triangolo ADB e ACD.

Il modo più semplice è quello di osservare che i due triangoli hanno la stessa altezza AC e quindi

$$R=\frac{A(\mathrm{ADB})}{A(\mathrm{ACD})}=\frac{\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{DB}}}{2}}{\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}}{2}}=\frac{\overline{\mathrm{DB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$$ da cui segue:

$$R=\frac{\sqrt{\left(x_{\mathrm{D}}-x_{\mathrm{B}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{B}}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{D}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{D}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2}}-1=\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{5}{3}\ .$$