Macerata 16 dicembre 2014 – classe 3M – COMPITO DI MATEMATICA

SOLUZIONE QUESITO 1

Scrivi l'equazione della retta *r* che passa per i punti A(-3:3) e B(1;1)

$$x+2y-3=0$$

L'equazione della retta per due punti è data da $\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$, sostituendo le coordinate di A e di B si ottiene: $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x+3}{1+3}$ da cui segue: $x+2y-3=0$

Tra le rette perpendicolari ad *r* individua la retta *s* che passa per il punto A e la retta *t* che passa C (3;0)

$s)\ 2x-y+9=0$ $\qquad$ $t)\ 2x-y-6=0$

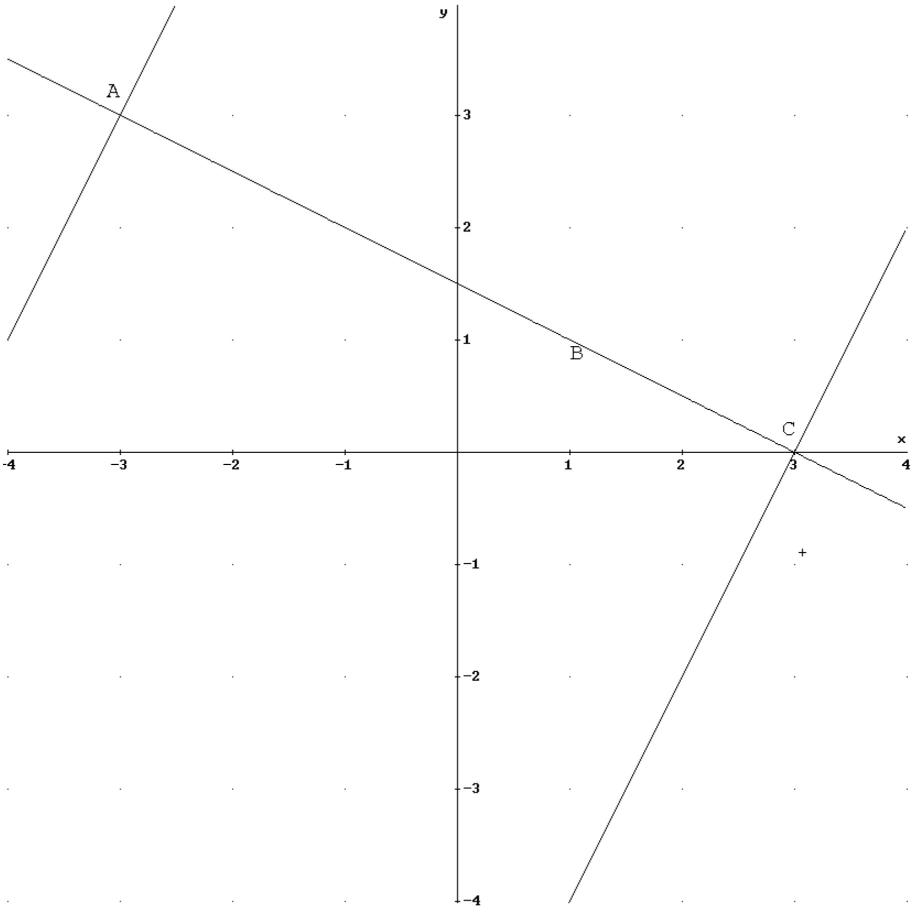
Le rette perpendicolari ad *r* hanno coefficiente angolare $m'=-\frac{1}{m}$ e poiché $m=-\frac{1}{2}$, $m'=2$.

L'equazione di tali rette è : $y=2x+q$ ovvero

[1] $$2x-y+q=0.$$

La retta *s* che passa per A si ottiene ponendo nell'equazione [1] le coordinate di A. Si ha $2(-3)-(3)+q=0$ da cui segue $q=9$ e quindi la retta *s* ha equazione $2x-y+9=0$.

La retta *t* che passa per C si ottiene ponendo nell'equazione [1] le coordinate di C. Si ha $2(3)-(0)+q=0$ da cui segue $q=-6$ e quindi la retta *t* ha equazione $2x-y-6=0$.



Scrivi l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta *r* .

$$y=-\frac{1}{2}x+q \text{ , o anche } x+2y-2q=0$$

L'equazione del fascio, improprio, di rette parallele a *r* è $y=-\frac{1}{2}x+q$, o anche $x+2y-2q=0$

Determina le rette del fascio che con le rette *r*, *s*, *t*, individuano un quadrato di lato AC.

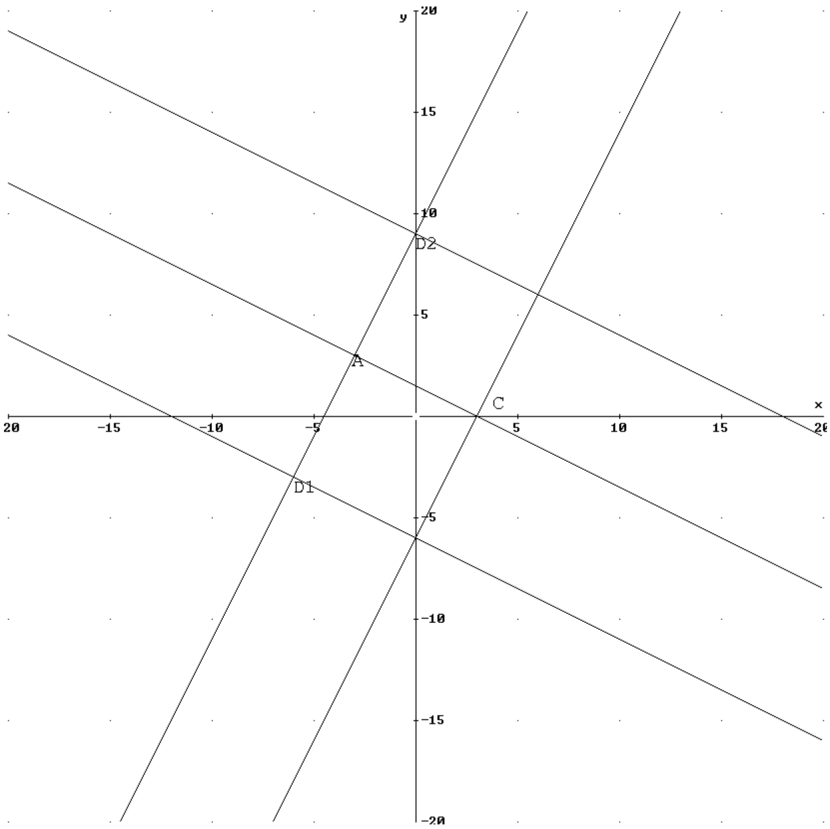
$$x+2y+12=0 \qquad\qquad x+2y-18=0$$

Bisogna individuare i punti sulla retta *s* o *t*, che hanno distanza dalla retta *r* uguale alla distanza tra i punti A e C.

[2] $$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{C}})^2+(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{C}})^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

Sia D un punto generico sulla retta *s*, le sue coordinate saranno $\mathrm{D}=(x;2x+9)$ e la sua distanza dalla retta *r*, ovvero da A, è:

[3] $$d(\mathrm{D},r)=\frac{|ax_{\mathrm{D}}+by_{\mathrm{D}}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|x+2(2x+9)-3|}{\sqrt{5}}$$



Eguagliando la [2] alla [3] si ha: $\frac{|5x+15|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$. Risolvendo: $|5x+15|=15$ da cui segue $5x+15=\pm 15$ e quindi le soluzioni $x_1=-6$ e $x_2=0$.

Ci sono quindi due punti che soddisfano le condizioni poste $\mathrm{D}_1=(-6;-3)$ e $\mathrm{D}_2=(0;9)$.

In alternativa si può porre $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$, ne segue che

$$\sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{C}})^2+(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{C}})^2}=\sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{D}})^2+(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{D}})^2}$$

da cui, elevando al quadrato:

$$(-3-3)^2+(3)^2=(-3-x)^2+\left[3-(2x+9)\right]^2$$

$$\cancel{45}=\cancel{9}+6x+x^2+\cancel{36}+24x+4x^2$$

da cui, risolvendo l'equazione, $x_1=-6$ e $x_2=0$.

Le rette del fascio che passano per essi si trovano ponendo le coordinate di D_1 e D_2 nell'equazione del fascio. Si ottiene: per D_1, $-3=-\frac{1}{2}(-6)+q$ da cui $q=-6$ e la retta di equazione $y=-\frac{1}{2}x-6$ ovvero $x+2y+12=0$. Per D_2, $9=q$ e la retta di equazione $y=-\frac{1}{2}x+9$ ovvero $x+2y-18=0$.

Oppure la distanza di A dalla generica retta *v* del fascio improprio del essere uguale ad $\overline{AC}$. Da cui segue: $d(A,v)=\frac{|-3+6-2q|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{|3+2q|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$, e quindi $|3+2q|=15 \Rightarrow 3+2q=\pm 15 \Rightarrow$

$q=\langle\begin{matrix}6\\-9\end{matrix}$. Le rette del fascio sono quindi $x+2y-12=0$ e $x+2y+18=0$.

Scrivi le coordinate dei punti A', B', C' simmetrici di A, B, C, rispetto all'origine e trova il baricentro G del triangolo AB'C $A'(3;-3) \quad B'(-1;-1) \quad C'(-3;0) \quad G\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

Ricordiamo che il simmetrico rispetto all'origine di un punto $P(x;y)$ è il punto $P'(-x;-y)$.

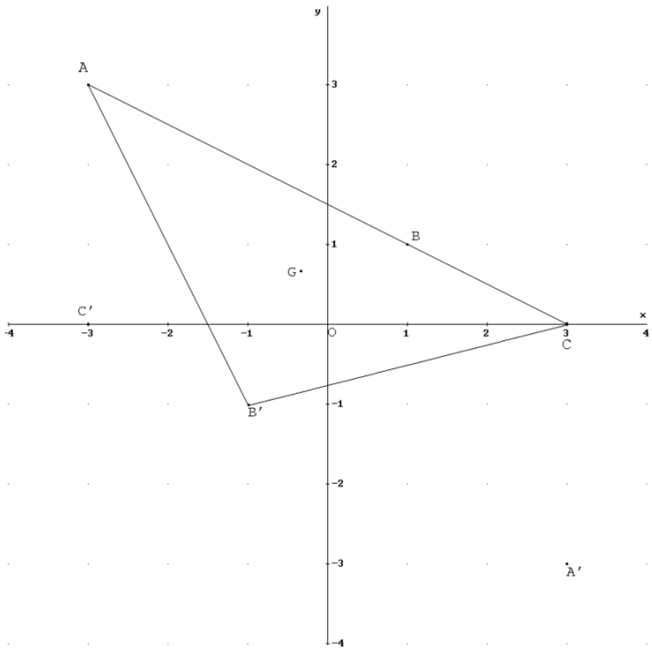
Pertanto: $A'(3;-3)$; $B'(-1;-1)$ e $C'(-3;0)$.

Le coordinate del baricentro del triangolo AB'C sono date da:

$$x_G=\frac{x_A+x_{B'}+x_C}{3}=\frac{-3+(-1)+3}{3}=-\frac{1}{3}$$

e

$$y_G=\frac{y_A+y_{B'}+y_C}{3}=\frac{3+(-1)+0}{3}=\frac{2}{3}$$



Trova la distanza di G dalla retta *r* utilizzando l'espressione per la distanza di un punto da una retta. $d(G,r)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

La distanza di G da *r* si determina con l'espressione

$$d(G,r)=\frac{|ax_G+by_G+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|-\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}-3\right|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

SOLUZIONE QUESITO 2

Nel fascio di rette di equazione $2(k+1)x-(k-1)y+k+3=0$ individua il centro C del fascio e le rette generatrici, indicando con *r* quella a cui non corrispondono valori di *k* e con *s* quella che corrisponde a *k* = 0. $\mathrm{C}(-1;-1)$ $\quad r)\ 2x-y+1=0 \quad s)\ 2x+y+3=0$

Sviluppiamo l'equazione del fascio:

$$2kx+2x-ky+y+k+3=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y+3+k(2x-y+1)=0$$

Si ha

$$r)\ 2x-y+1=0 \qquad \text{e} \qquad s)\ 2x+y+3=0$$

Il centro del fascio si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$. Sommando membro a membro si ha: $4x+4=0$ da cui $x=-1$. Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda si ha: $-2y-2=0$, da cui $y=-1$.

Determina le equazioni delle rette *a* e *b* parallele all'asse delle ordinate che passano rispettivamente per i punti A e B dell'asse *x*, con $x_A < x_B$, le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^2+x-2=0$. $a)\ x+2=0 \qquad b)\ x-1=0$

Risolvendo l'equazione $x^2+x-2=0$ si ottengono le ascisse dei punti A e B. Si ha:

$$x_{A,B}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_A=-2 \\ x_B=1 \end{array} \right. .$$

Le rette cercate sono quindi: $a)\ x+2=0$ e $b)\ x-1=0$.

Disegna su un piano cartesiano le rette trovate e indica con L, M, N, Q rispettivamente i punti di intersezione tra le rette *r* e *a*, *s* e *b*, *r* e *b*, *s* e *a* .

Vedi figura pagina 5.

Dimostra che l'area del triangolo MCN è 4 volte quella del triangolo LCQ.

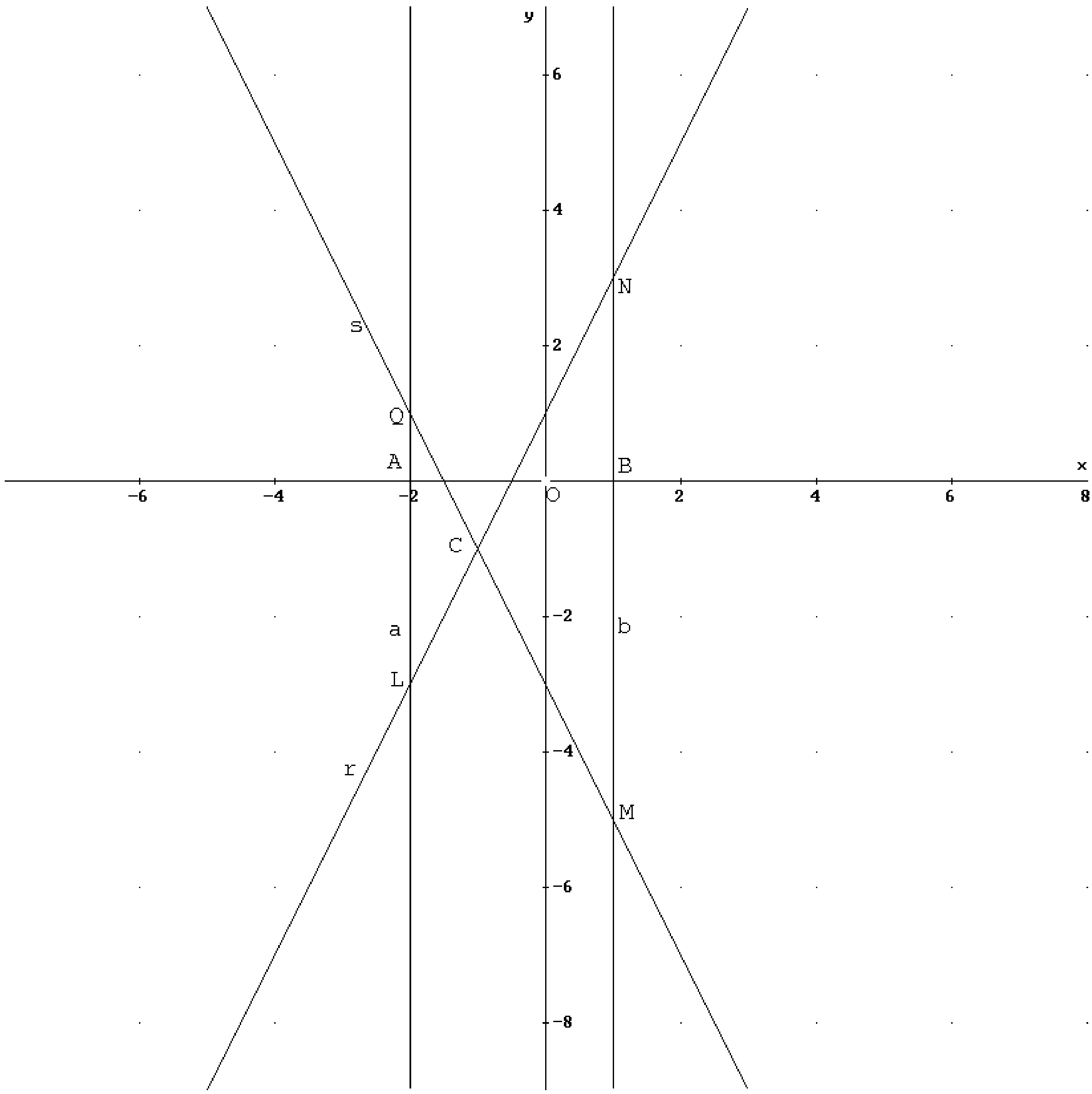
Troviamo le coordinate dei punti L, M, N, Q.

L) $\begin{cases} y=2x+1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2(-2)+1 \\ x=-2 \end{cases} \qquad \mathrm{L}(-2;-3)$

M) $\begin{cases} y=-2x-3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2(1)-3 \\ x=1 \end{cases} \qquad \mathrm{M}(1;-5)$

N) $\begin{cases} y=2x+1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2(1)+1 \\ x=1 \end{cases} \qquad \mathrm{N}(1;3)$

Q) $\begin{cases} y=-2x-3 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2(-2)-3 \\ x=-2 \end{cases} \qquad \mathrm{Q}(-2;1)$



Per il triangolo LCQ possiamo considerare la base $b_{\mathrm{LCQ}} = \overline{\mathrm{LQ}} = |y_{\mathrm{L}} - y_{\mathrm{Q}}| = |-3-1| = 4$ e l'altezza ad essa relativa h_{LCQ} che è la distanza di C dalla retta *a*: $h_{\mathrm{LCQ}} = |x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}| = |-1-(-2)| = 1$.

$A_{\mathrm{LCQ}} = \frac{1}{2} h_{\mathrm{LCQ}} \cdot b_{\mathrm{LCQ}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$.

Per il triangolo MCN possiamo considerare la base $b_{\mathrm{MCN}} = \overline{\mathrm{MN}} = |y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{N}}| = |-5-3| = 8$ e l'altezza ad essa relativa h_{MCN} che è la distanza di C dalla retta *b*: $h_{\mathrm{MCN}} = |x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}| = |-1-(1)| = 2$.

$A_{\mathrm{MCN}} = \frac{1}{2} h_{\mathrm{MCN}} \cdot b_{\mathrm{MCN}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$

Si ha quindi: $A_{\mathrm{MCN}} = 4 A_{\mathrm{LCQ}}$.

In modo alternativo.

Si ha che $\mathrm{Q\hat{L}C} = \mathrm{M\hat{N}C}$ perché alterni interni tra le rette *a* e *b* tagliate da *r*, $\mathrm{L\hat{Q}C} = \mathrm{N\hat{M}C}$ perché alterni interni tra le stesse rette *a* e *b* tagliate da *s*, e infine $\mathrm{L\hat{C}Q} = \mathrm{M\hat{C}N}$ perché opposti al vertice.

I triangoli LCQ e MCN sono pertanto simili. Le loro aree stanno quindi tra loro come il quadrato delle rispettive altezze $A_{\text{LCQ}} : A_{\text{MCN}} = h^2_{\text{LCQ}} : h^2_{\text{MCN}}$; da ciò segue

$$A_{\text{MCN}} = A_{\text{LCQ}}\left(\frac{h_{\text{MCN}}}{h_{\text{LCQ}}}\right)^2 = A_{\text{LCQ}}\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4A_{\text{LCQ}}.$$

Scrivi le equazioni delle bisettrici t_1 e t_2 degli angoli formati dalle rette *r* e *s* e dimostra che sono le rette del fascio parallele agli assi. A quali valori di *k* corrispondono? Le rette hanno equazione $x+1=0$ e $y+1=0$. I valori di k corrispondenti sono $k=1$ e $k=-1$.

Le rette del fascio parallele agli assi sono: $x+1=0$ e $y+1=0$. Per determinare il valore di *k* cui corrisponde $x+1=0$ basta porre il coefficiente della *y* nell'equazione del fascio uguale a zero, ossia: $-(k-1)=0$ da cui si ricava $k=1$. Per determinare il valore di *k* cui corrisponde $y+1=0$ basta porre il coefficiente della *x* nell'equazione del fascio uguale a zero, ossia: $2(k+1)=0$ da cui si ricava $k=-1$.

Troviamo ora le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette *r* e *s*. Dalla definizione segue che un punto P di coordinate generiche $(x; y)$ deve essere equidistante delle rette *r* e *s*.

Si ha:

$$d(\text{P},r) = \frac{|ax_{\text{P}} + by_{\text{P}} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad d(\text{P},s) = \frac{|a'x_{\text{P}} + b'y_{\text{P}} + c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}} = \frac{|2x+y+3|}{\sqrt{5}}$$

Uguagliando:

$\dfrac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2x+y+3|}{\sqrt{5}}$ da cui $|2x-y+1| = |2x+y+3|$, quindi $2x-y+1 = \pm(2x+y+3)$ si hanno quindi le due equazioni:

$$2x-y+1 = 2x+y+3 \quad \Rightarrow \quad -2y-2=0 \quad \Rightarrow \quad y+1=0$$

$$2x-y+1 = -(2x+y+3) \quad \Rightarrow \quad 4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x+1=0$$

Calcola per quali valori del parametro *k* le rette del fascio intersecano il segmento di estremi $\text{F}(1; 0)$ e $\text{G}(4; -2)$ $-\dfrac{5}{3} \le k \le -\dfrac{9}{11}$

Troviamo le rette che passano per F e per G sostituendo le coordinate di tali punti nell'equazione del fascio.

La retta per F:

$2(k+1)\cdot 1 - (k-1)\cdot 0 + k + 3 = 0$ da cui $3k+5=0$ ossia $k=-\dfrac{5}{3}$. Sostituendo nell'equazione del fascio si ha: $2\left(-\dfrac{5}{3}+1\right)x - \left(-\dfrac{5}{3}-1\right)y - \dfrac{5}{3} + 3 = 0$ dai cui $x-2y-1=0$

La retta per G:

$2(k+1)\cdot 4 - (k-1)\cdot(-2) + k + 3 = 0$ da cui $11k+9=0$ ossia $k=-\dfrac{9}{11}$. Sostituendo nell'equazione del fascio si ha: $2\left(-\dfrac{9}{11}+1\right)x - \left(-\dfrac{9}{11}-1\right)y - \dfrac{9}{11} + 3 = 0$ da cui $x+5y+6=0$.

Tenendo presenti le rette trovate precedentemente e i corrispondenti valori di k, è facile vedere che per valori di k crescenti il fascio ruota in senso orario e quindi le rette intersecheranno il segmento FG per $-\frac{5}{3} \leq k \leq -\frac{9}{11}$.

Basterebbe anche osservare che la retta del fascio parallela all'asse delle ascisse corrisponde a $k = -1$ e interseca il segmento FG, inoltre risulta $-\frac{5}{3} < -1 < -\frac{9}{11}$. Intersecheranno il segmento quindi, tutte le rette del fascio per le quali $-\frac{5}{3} \leq k \leq -\frac{9}{11}$