SOLUZIONI RECUPERO ASSENTI

1) $(x-2)^4(x^3+8)(x^6+x^4-x^2-1)\geq 0$	$-2\leq x\leq -1 \vee x\geq 1$

Pag. 45 n. 226 modificata

Il termine di sinistra della disequazione va scomposto in fattori, in particolare il secondo e il terzo fattore. Si ha:

$$(x-2)^4(x+2)(x^2-2x+4)\left[x^4(x^2+1)-(x^2+1)\right]\geq 0$$

$$(x-2)^4(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+1)(x^4-1)\geq 0$$

$$(x-2)^4(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+1)^2(x^2-1)\geq 0$$

Studiamo il segno di ogni fattore

$\Rightarrow (x-2)^4$ è sempre maggiore di zero tranne per x = 2 che risulta uguale a zero

$\Rightarrow (x+2)$

$(x+2)>0$ per x > - 2

$(x+2)=0$ per x = - 2

$(x+2)<0$ per x < - 2

$\Rightarrow (x^2-2x+4)$ è sempre maggiore di zero in quanto il trinomio ha il coefficiente della x^2 maggiore di 0 e il $\Delta < 0$

$\Rightarrow (x^2+1)^2$ Sempre maggiore di zero essendo il quadrato della somma di due quadrati

$\Rightarrow (x^2-1)$

$(x^2-1)>0$ per x < -1 e x > 1

$(x^2-1)=0$ per x = ± 1

$(x^2-1)<0$ per -1 < x < 1

Riassumendo

		-2		-1		1		2	
$(x-2)^4$	+	|	+	|	+	|	+	0	+
$(x+2)$	-	0	+	|	+	|	+	|	+
(x^2-2x+4)	+	|	+	|	+	|	+	|	+
$(x^2+1)^2$	+	|	+	|	+	|	+	|	+
(x^2-1)	+	|	+	0	-	0	+	|	+
	-	0	+	0	-	0	+	0	+

La soluzione è quindi - 2 ≤ x ≤ - 1, x ≥ 1.

2) $\frac{2(3-x)}{(x-1)(x-5)}+\frac{6}{x-5}+\frac{x}{x-1}-\frac{4x}{x^2-6x+5}>0$	$x<0\vee 1<x<5\vee x>5$

Pag. 48 n. 279.

E' una disequazione razionale fratta e per prima cosa bisogna ridurla alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}\le 0$. Si osservi immediatamente che $(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$, quindi

$\frac{2(3-x)+6(x-1)+x(x-5)-4x}{(x-1)(x-5)}>0$ da cui segue $\frac{x^2-5x}{(x-1)(x-5)}>0$

⇒ Il numeratore, x^2-5x, risulta maggiore di zero per x < 0 e x > 5, uguale a zero per x = 0 e x = 7, minore di zero per 0 < x < 5.

⇒ Il denominatore $(x-1)(x-5)$ risulta maggiore di zero per x < 1 e x > 5, uguale a zero per x = 1 e x = 5, minore di zero per 1 < x < 5.

Riassumendo

		0		1		5	
N	+	0	-	|	-	0	+
D	+	|	+	0	-	0	+
N/D	+	0	-	∄	+	∄	+

La soluzione è quindi x < 0, 1 < x < 5, x > 5.

3) $\begin{cases}\frac{x-2}{x+1}\ge 2\\ x^4-3x^2-4\ge 0\end{cases}$	$-4\le x\le -2$

Pag. 52 n. 320 modificata

E' un sistema di disequazioni. È quindi necessario risolvere le due disequazioni separatamente e poi fare l'intersezione delle soluzioni.

⇒ La prima disequazione è una disequazione razionale fratta, quindi, dopo averla ricondotta alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}\ge 0$ basta studiare il segno del numeratore e quello del denominatore e fare il prodotto dei segni.

Si ha:

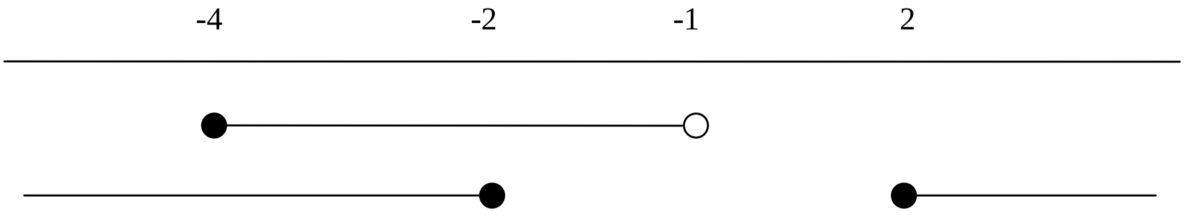
$\frac{x-2}{x+1}\ge 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-2-2(x+1)}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-2-2x-2}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-x-4}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x+4}{x+1}\le 0$

		-4		-1	
$x+4$	-	0	+	|	+
$x+1$	-	|	-	0	+
	+	0	-	∄	+

La soluzione è -4 ≤ x < -1

$\Rightarrow$ La seconda disequazione è una biquadratica.
Poniamo quindi $t = x^2$, si ha: $t^2 - 3t - 4 \geq 0$ che è soddisfatta per $t \leq -1$ e $t \geq 4$. Ne segue che deve essere $x^2 \leq -1$ e $x^2 \geq 4$.
La prima non è mai soddisfatta, mentre la seconda è soddisfatta per $x \leq -2$ e $x \geq 2$

Riportando in un diagramma le soluzioni delle due disequazioni otteniamo



La soluzione è $-4 \leq x \leq -2$.

4) $\dfrac{\left\|x-2\right\|-10}{16-\left\|x^2-8x\right\|} \leq 0$	$x \leq -8, 4-4\sqrt{2} < x < 4+4\sqrt{2}, x \neq 4, x \geq 12$

Pag. 61 n. 493

E' una disequazione fratta con valori assoluti. Per la soluzione si possono seguire due modi: il primo che riporto è il più immediato.

PRIMO MODO: si studiano il segno del numerato e quello del denominatore:

Numeratore $|x-2|-10$
Vediamo quando è maggiore o uguale a zero: $|x-2|-10 \geq 0$
$|x-2| \geq 10$ da cui segue: $x-2 \leq -10$ e $x-2 \geq 10$, ossia $x \leq -8$, $x \geq 12$.
Ovviamente, $|x-2|-10 < 0$ per $-8 < x < 12$

Denominatore: $16-|x^2-8x|$
Vediamo quando è positivo: $16-|x^2-8x| > 0$
Si ha: $|x^2-8x| < 16$ ossia $-16 < x^2-8x < 16$ che equivale a risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2-8x > -16 \\ x^2-8x < 16 \end{cases} \quad \text{da cui segue: } \begin{cases} x^2-8x+16 = (x-4)^2 > 0 \\ x^2-8x-16 < 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$ tranne $x = 4$. La seconda disequazione è soddisfatta per $4-4\sqrt{2} < x < 4+4\sqrt{2}$. Si ha quindi
$16-|x^2-8x| > 0$ per $4-4\sqrt{2} < x < 4$ e $4 < x < 4+4\sqrt{2}$
$16-|x^2-8x| < 0$ per $x < 4-4\sqrt{2}$ e $x > 4+4\sqrt{2}$
$16-|x^2-8x| = 0$ per $x = 4 \pm 4\sqrt{2}$ e $x = 4$

Mettendo insieme i segni del numeratore e del denominatore si ha:

	-8		$4-4\sqrt{2}$		4		$4+4\sqrt{2}$		12	
$\lvert x-2\rvert-10$	+ 0	-	|	-	|	-	|	-	0	+
$16-\lvert x^2-8x\rvert$	- |	-	0	+	0	+	0	-	|	-
	- 0	+	$\nexists$	-	$\nexists$	-	$\nexists$	+	0	-

Da cui la soluzione: $x \le -8$, $4-4\sqrt{2} < x < 4+4\sqrt{2}$, $x \ne 4$, $x \ge 12$.

SECONDO MODO: si studia il segno delle due quantità dentro il valore assoluto
$x-2>0$ per $x>2$
$x-2=0$ per $x=2$
$x-2<0$ per $x<2$

$x^2-8x = x(x-8)$ > 0 per $x<0 \vee x>8$

$x^2-8x = x(x-8)$ = 0 per $x=0$ e $x=8$

$x^2-8x = x(x-8)$ < 0 per $0<x<8$

		0		2		8	
$x-2$	-	|	-	0	+	|	+
x^2-8x	+	0	-	|	-	0	+

Ciò ci permette di identificare quattro zone e i segni di ognuna delle espressione dentro il valore assoluto. Abbiamo quindi i seguenti quattro sistemi:

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{-(x-2)-10}{16-(x^2-8x)} \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{-(x-2)-10}{16+(x^2-8x)} \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x \le 8 \\ \dfrac{(x-2)-10}{16+(x^2-8x)} \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>8 \\ \dfrac{(x-2)-10}{16-(x^2-8x)} \le 0 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei quattro sistemi.

$\Rightarrow$ Risolviamo il primo; semplificando si ottiene

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x+8}{x^2-8x-16} \le 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione è una razionale fratta e il suo denominatore ha radici $x = 4 \pm 4\sqrt{2} \begin{cases} \approx 9,657 \\ \approx -1,657 \end{cases}$. Considerando quindi che la parabola associato al denominatore ha la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente di x^2 è positivo), ricaviamo la soluzione dal grafico

		-8		$4-4\sqrt{2}$		$4+4\sqrt{2}$	
$x+8$	-	0	+	|	+	|	+
$x^2-8x+16$	+	|	+	0	-	0	+
	-	0	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+

La soluzione è $x \le -8$ e $4-4\sqrt{2} < x < 4+4\sqrt{2}$.

Essendo x < 0, la soluzione del sistema è x ≤ - 8 e $4-4\sqrt{2}$ < x < 0

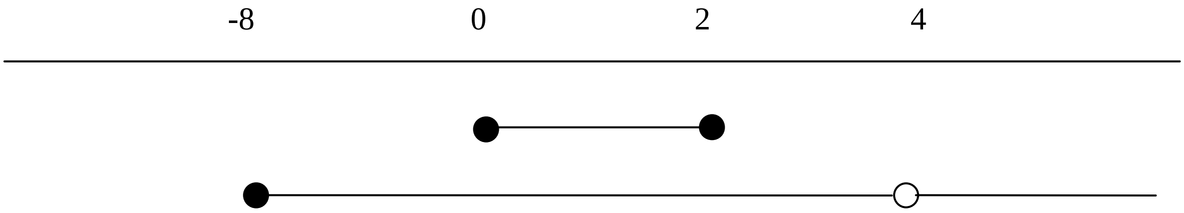
⇒ Risolviamo il secondo sistema; semplificando si ottiene

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{x+8}{(x-4)^2} \ge 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso studiamo la seconda disequazione, riportando i risultati in grafico si ha:

		-8		4	
$x+8$	-	0	+	|	+
$(x-4)^2$	+	|	+	0	+
	-	0	+	∄	+

La soluzione è   -8 ≤ x < 4, x > 4.
Per vedere la soluzione del secondo sistema riportiamo in grafico



La soluzione del secondo sistema è 0 ≤ x ≤ 2.

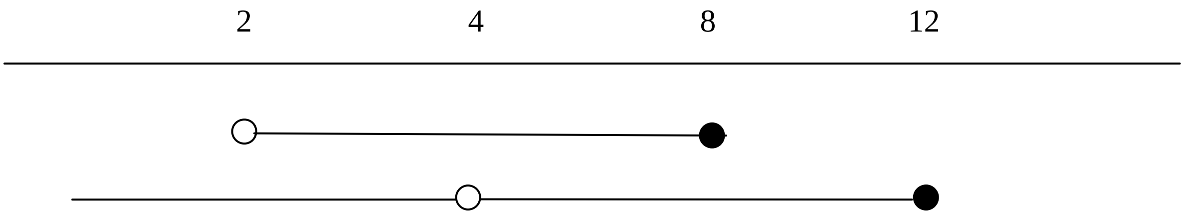
⇒ Per quanto riguarda il terzo sistema, risolvendo si arriva a:

$$\begin{cases} 2 < x \le 8 \\ \dfrac{x-12}{(x-4)^2} \le 0 \end{cases}$$

Basta studiare la seconda disequazione. Si osservi che il denominatore è uguale al caso precedente.
Riportando i risultati in grafico si ha:

		4		12	
$x-12$	-	|	-	0	+
$(x-4)^2$	+	0	+	|	+
	-	∄	-	0	+

La soluzione è   x < 4, 4 < x ≤ 12.
Per vedere la soluzione del terzo sistema riportiamo in grafico



La soluzione del secondo sistema è 2 < x < 4 e 4 < x ≤ 8.

⇒ Per quanto riguarda il quarto sistema, risolvendo si arriva a:

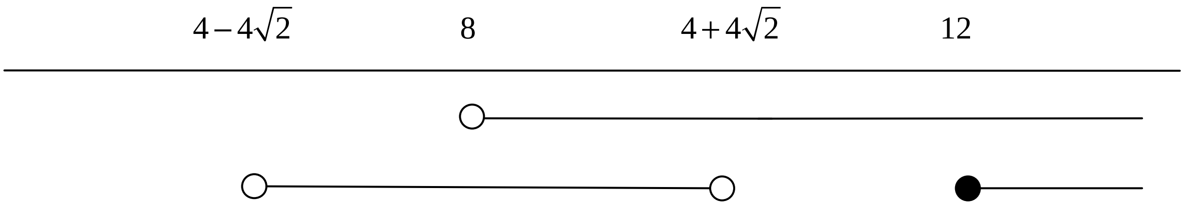
$$\begin{cases} x > 8 \\ \dfrac{x-12}{x^2-8x+16} \geq 0 \end{cases}$$

Si osservi la seconda disequazione: il numeratore è uguale al numeratore della seconda disequazione del terzo sistema, il denominatore è uguale al denominatore del primo sistema. Riportando i risultati in grafico si ha:

		$4-4\sqrt{2}$		$4+4\sqrt{2}$		12	
$x-12$	-	|	-	|	-	0	+
$x^2-8x+16$	+	0	-	0	+	|	+
	-	∄	+	∄	-	0	+

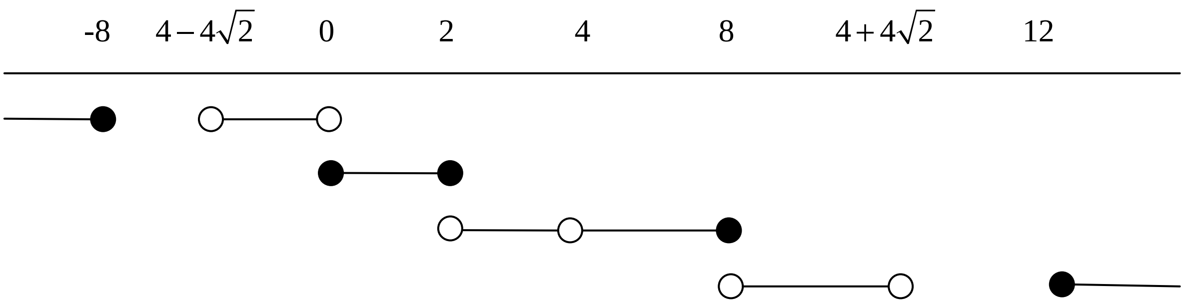
La soluzione è $4-4\sqrt{2} < x < 4+4\sqrt{2}$, $x \geq 12$.

Per vedere la soluzione del quarto sistema riportiamo in grafico



La soluzione del quarto sistema è $8 < x < 4+4\sqrt{2}$, $x \geq 12$.

I seguente grafico riposta le soluzioni dei quattro sistemi.



Unendo le quattro soluzioni si ha: $x \leq -8$, $4-4\sqrt{2} < x < 4+4\sqrt{2}$, $x \neq 4$, $x \geq 12$.

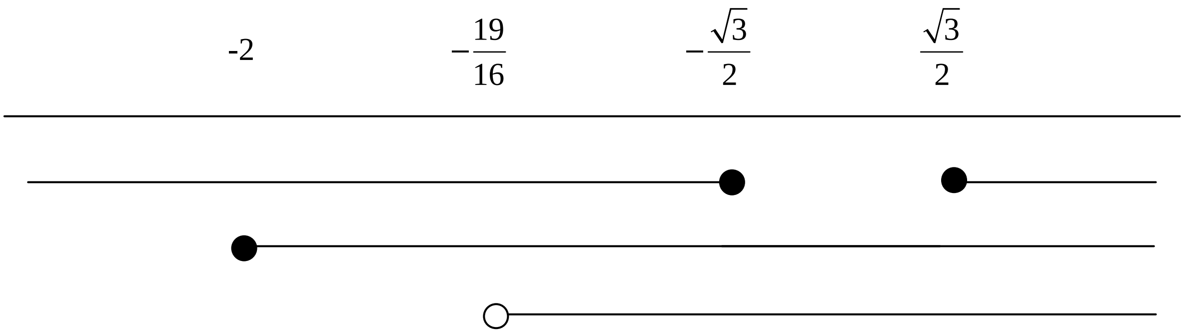
5) $\sqrt{4x^2-3} < 2x+4$	$-\frac{19}{16} < x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pag. 66 n. 587

E' una disequazione irrazionale con radice di esponente pari. Si risolve risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4x^2-3\geq 0 \\ 2x+4\geq 0 \\ 4x^2-3<(2x+4)^2 \end{cases} \qquad \text{da cui segue} \qquad \begin{cases} x\leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \vee x\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x\geq -2 \\ 16x+19>0 \end{cases}$$

La soluzione della terza equazione è : $x>-\dfrac{19}{16}$, riportando in grafico si ha la soluzione $-\dfrac{19}{16}<x\leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, x\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



6) $\sqrt{2(x+15)}+2x^2>x(1-x)+3(1+x^2)$ $\qquad\qquad -15\leq x<3$

Pag. 67 n. 591

E’ una disequazione irrazionale con radice di esponente pari. Semplifichiamo, si ottiene : $\sqrt{2(x+15)}>x+3$ che si risolve risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} x+15\geq 0 \\ x+3<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3\geq 0 \\ 2(x+15)>(x+3)^2 \end{cases}$$

e facendo poi l’unione delle soluzioni.

$\Rightarrow$ Risolviamo il primo sistema.

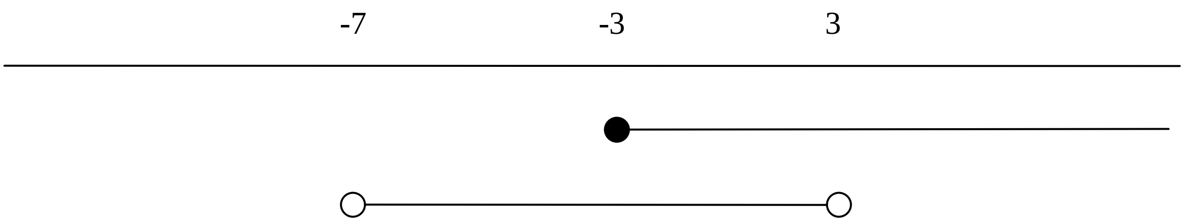
Si ha: $\begin{cases} x\geq -15 \\ x<-3 \end{cases}$ la cui soluzione è $-15\leq x<-3$

$\Rightarrow$ Risolviamo il secondo sistema.

Semplificando si ha: $\begin{cases} x\geq -3 \\ x^2+4x-21<0 \end{cases}$

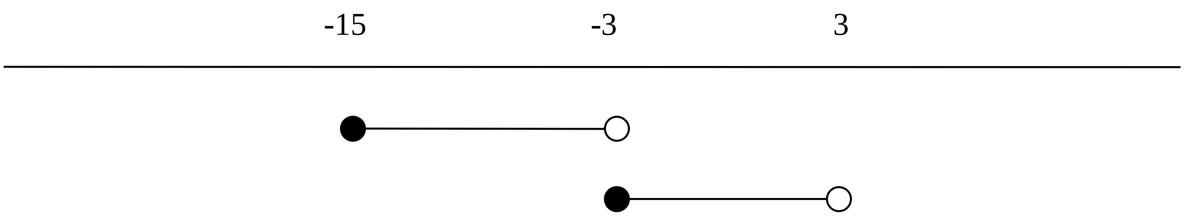
La seconda disequazione è di secondo grado, il coefficiente di x^2 è positivo e l’equazione associata si annulla per x = -7 e x = 3; è quindi soddisfatta per $-7<x<3$.

Riportando i risultati in grafico si ha



La soluzione è $-3 \leq x < 3$.

Riportando i risultati in grafico e unendo le due soluzioni si ha



la soluzione della disequazione: $-15 \leq x < 3$.