SOLUZIONI FILA 2

1) $(x+3)^4(x^3-27)(x^6+x^4-x^2-1)\ge 0$	$x=-3 \vee -1\le x\le 1 \vee x\ge 3$

Pag. 45 n. 226 modificato

Il termine di sinistra della disequazione va scomposto in fattori, in particolare il secondo e il terzo fattore. Si ha:

$$(x+3)^4(x-3)(x^2+3x+9)\left[x^4(x^2+1)-(x^2+1)\right]\ge 0$$

$$(x+3)^4(x-3)(x^2+3x+9)(x^2+1)(x^4-1)\ge 0$$

$$(x+3)^4(x-3)(x^2+3x+9)(x^2+1)^2(x^2-1)\ge 0$$

Studiamo il segno di ogni fattore

$\Rightarrow (x+3)^4$ è sempre maggiore di zero tranne per x = - 3 che risulta uguale a zero

$\Rightarrow (x-3)$

$(x-3)>0$ per x > 3

$(x-3)=0$ per x = 3

$(x-3)<0$ per x < 3

$\Rightarrow (x^2+3x+9)$ è sempre maggiore di zero in quanto il trinomio ha il coefficiente della x^2 maggiore di 0 e il $\Delta < 0$

$\Rightarrow (x^2+1)^2$ Sempre maggiore di zero essendo il quadrato della somma di due quadrati

$\Rightarrow (x^2-1)$

(x^2-1) >0 per x < -1 e x > 1

(x^2-1) =0 per x = ± 1

(x^2-1) < 0 per -1 < x < 1

Riassumendo

		-3		-1		1		3	
$(x+3)^4$	+	0	+	|	+	|	+	|	+
$(x-3)$	-	|	-	|	-	|	-	0	+
(x^2+3x+9)	+	|	+	|	+	|	+	|	+
$(x^2+1)^2$	+	|	+	|	+	|	+	|	+
(x^2-1)	+	|	+	0	-	0	+	|	+
	-	0	-	0	+	0	-	0	+

La soluzione è quindi x = - 3, -1 ≤ x ≤ 1, x ≥ 3.

2) $\frac{x-3}{x-2}-\frac{5x+1}{x-3}+\frac{3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\le 0$	$x\le -3 \vee 2<x<3 \vee x\ge 4$

Pag. 48 n. 269 modificato.

E' una disequazione razionale fratta e per prima cosa bisogna ridurla alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}\le 0$. Si osservi immediatamente che $(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$, quindi

$\frac{(x-3)^2-(5x+1)(x-2)+3x^2-2x+1}{(x-2)(x-3)}\le 0$ da cui segue $\frac{-x^2+x+12}{(x-2)(x-3)}\le 0$ e quindi

$$\frac{x^2-x-12}{(x-2)(x-3)}\ge 0$$

⇒ Il numeratore, x^2-x-12, risulta maggiore di zero per x < -3 e x > 4, uguale a zero per x = -3 e x = 4, minore di zero per -3 < x < 4.

⇒ Il denominatore $(x-2)(x-3)$ risulta maggiore di zero per x < 2 e x > 3, uguale a zero per x = 2 e x = 3, minore di zero per 2 < x < 3.

Riassumendo

		-3		2		3		4	
N	+	0	-	|	-	|	-	0	+
D	+	|	+	0	-	0	+	|	+
N/D	+	0	-	∄	+	∄	-	0	+

La soluzione è quindi x ≤ -3, 2 < x < 3, x ≥ 4.

3) $\begin{cases}\frac{x-2}{x+1}\ge 2\\ x^4+3x^2-4\ge 0\end{cases}$	$-4\le x<-1$

Pag. 52 n. 320

E' un sistema di disequazioni. È quindi necessario risolvere le due disequazioni separatamente e poi fare l'intersezione delle soluzioni.

⇒ La prima disequazione è una disequazione razionale fratta, quindi, dopo averla ricondotta alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}\ge 0$ basta studiare il segno del numeratore e quello del denominatore e fare il prodotto dei segni.

Si ha:

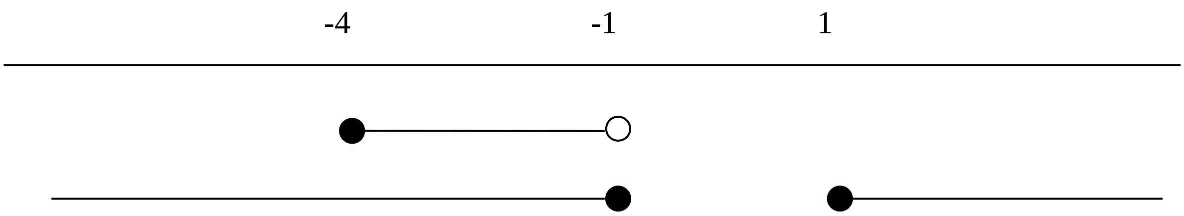
$$\frac{x-2}{x+1}\ge 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-2-2(x+1)}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-2-2x-2}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-x-4}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x+4}{x+1}\le 0$$

		-4		-1	
$x+4$	-	0	+	$\vert$	+
$x+1$	-	$\vert$	-	0	+
	+	0	-	$\nexists$	+

La soluzione è $-4 \leq x < -1$

$\Rightarrow$ La seconda disequazione è una biquadratica.
Poniamo quindi $t = x^2$, si ha: $t^2 + 3t - 4 \geq 0$ che è soddisfatta per $t \leq -4$ e $t \geq 1$. Ne segue che deve essere $x^2 \leq -4$ e $x^2 \geq 1$.
La prima non è mai soddisfatta, mentre la seconda è soddisfatta per $x \leq -1$ e $x \geq 1$

Riportando in un diagramma le soluzioni delle due disequazioni otteniamo



La soluzione è $-4 \leq x < -1$.

4) $\dfrac{|2x-5|-1}{|x|-3} \geq 0$ $\qquad$ $x < -3,\ 2 \leq x < 3,\ x > 3$

Pag. 61 n. 491 modificata

E' una disequazione fratta con valori assoluti. Per la soluzione si possono seguire due modi: il primo che riporto è il più immediato.

PRIMO MODO: si studiano il segno del numerato e quello del denominatore

Numeratore $|2x-5|-1$

Vediamo quando è maggiore o uguale a zero: $|2x-5|-1 \geq 0$

$|2x-5| \geq 1$ da cui segue: $2x-5 \leq -1$ e $2x-5 \geq 1$, ossia $x \leq 2$, $x \geq 3$.

Ovviamente, $|2x-5|-1 < 0$ per $2 < x < 3$

Denominatore: $|x|-3$

Vediamo quando è positivo: $|x|-3 > 0$

Si ha: $|x| > 3$ ossia $x < -3$ e $x > 3$

Ovviamente
$|x|-3 < 0$ per $-3 < x < 3$

$|x|-3 = 0$ per $x = \pm 3$

Mettendo insieme i segni del numeratore e del denominatore si ha:

		-3		2		3	
$\lvert 2x-5\rvert -1$	+	$\vert$	+	0	-	0	+
$\lvert x\rvert -3$	+	0	-	$\vert$	-	0	+
	+	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	+

Da cui la soluzione: $x<-3$, $2\le x<3$, $x>3$.

SECONDO MODO: si studia il segno delle due quantità dentro il valore assoluto

$2x-5>0$ per $x>\dfrac{5}{2}$

$2x-5=0$ per $x=\dfrac{5}{2}$

$2x-5<0$ per $x<\dfrac{5}{2}$

Tralasciamo l'ovvio studio del segno del secondo modulo e riportiamo in grafico

		0		5/2	
2x – 3	-	$\vert$	-	0	+
x	-	0	+	$\vert$	+

Ciò ci permette di identificare tre zone e i segni di ognuna delle espressione dentro il valore assoluto. Abbiamo quindi i seguenti tre sistemi:

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{-(2x-5)-1}{-x-3}\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le x\le 5/2 \\ \dfrac{-(2x-5)-1}{x-3}\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>5/2 \\ \dfrac{(2x-5)-1}{x-3}\ge 0 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei tre sistemi.

$\Rightarrow$ Risolviamo il primo; semplificando si ottiene

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{2(x-2)}{x+3}\ge 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione è una razionale fratta. Ricaviamo la soluzione dal grafico

		-3		2	
x – 2	-	$\vert$	-	0	+
x + 3	-	0	+	$\vert$	+
	+	$\nexists$	-	0	+

La soluzione è $x < -3$ e $x \ge 2$. Dovendo però essere $x < 0$, la soluzione del sistema è $x < -3$.

$\Rightarrow$ Risolviamo il secondo sistema; semplificando si ottiene

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5/2 \\ \dfrac{2(-x+2)}{x-3} \ge 0 \end{cases}$$

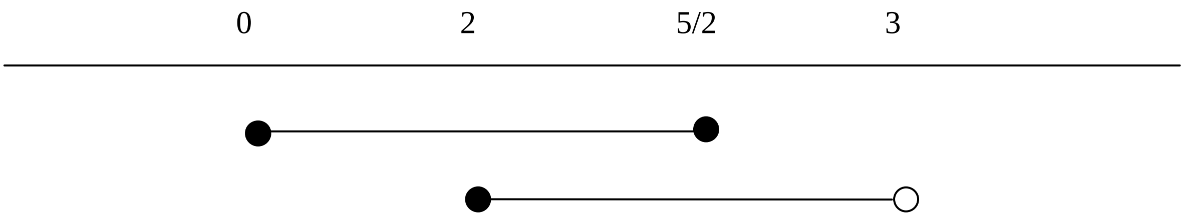
Anche in questo caso basta studiare la seconda disequazione, riportando i risultati in grafico si ha:

		2		3	
- x + 2	+	0	-	$\vert$	-
x - 3	-	$\vert$	-	0	+
	-	0	+	∄	-

La soluzione è $2 \le x < 3$

.

Per vedere la soluzione del secondo sistema riportiamo in grafico



La soluzione del secondo sistema è $2 \le x \le 5/2$.

⇒ Per quanto riguarda il terzo sistema, risolvendo si arriva a:

$$\begin{cases} x > 5/2 \\ \dfrac{2(x-3)}{x-3} \ge 0 \end{cases}$$

Si osserva che la seconda disequazione, per x = 3, non ha senso (viene 0/0 che è indeterminato), ma per $x \ne 3$ si può semplificare e si riduce a $2 \ge 0$ che è sempre verificata.

La soluzione del sistema è quindi $x > 5/2$, ma $x \ne 3$.

Unendo le tre soluzion1 si ha: $x < -3$, $2 \le x < 3$, $x > 3$.

5) $\sqrt{7+2(x+3)-3(2x-1)} < -4-x$	$x < -12$

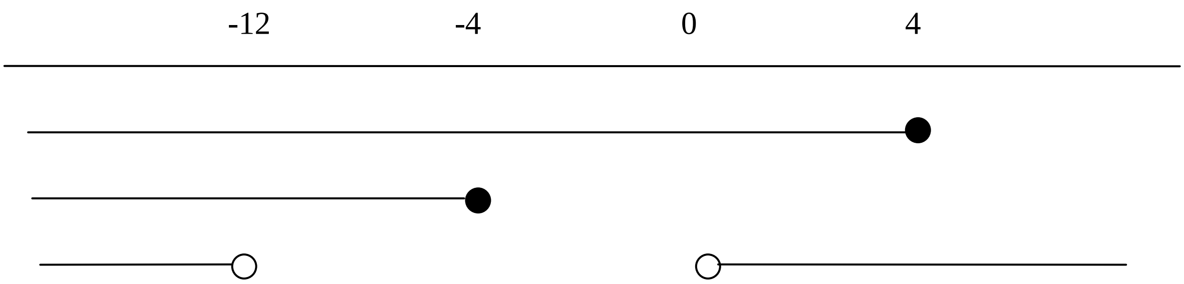
Pag. 66 n. 582 modificata

E' una disequazione irrazionale con radice di esponente pari. Semplifichiamo sotto la radice, si ottiene :

$\sqrt{16-4x} < -4-x$ che si risolve risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 16-4x \ge 0 \\ -4-x \ge 0 \\ 16-4x < (-4-x)^2 \end{cases} \qquad \text{da cui segue} \qquad \begin{cases} x \le 4 \\ x \le -4 \\ x^2+12x > 0 \end{cases}$$

La soluzione della terza equazione è : $x < -12$ e $x > 0$, riportando in grafico il sistema è soddisfatto per $x < -12$.



6) $\sqrt{x(x+6)-x+6}+2x>3x-1$	$x\le -3 \vee x\ge -2$

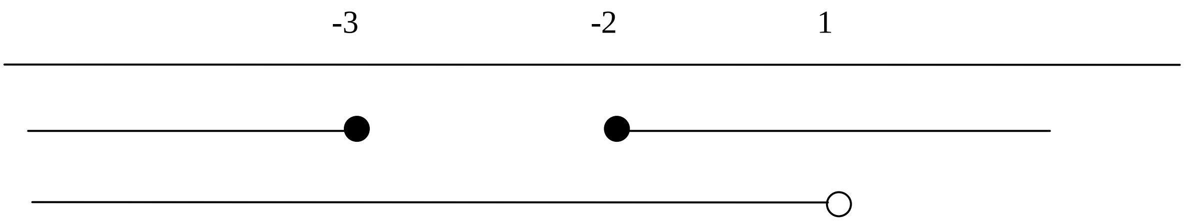
Pag. 67 n. 590

E' una disequazione irrazionale con radice di esponente pari. Semplifichiamo, si ottiene :
$\sqrt{x^2+5x+6}>x-1$ che si risolve risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} x^2+5x+6\ge 0 \\ x-1<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2+5x+6>(x-1)^2 \end{cases}$$

e facendo poi l'unione delle soluzioni.

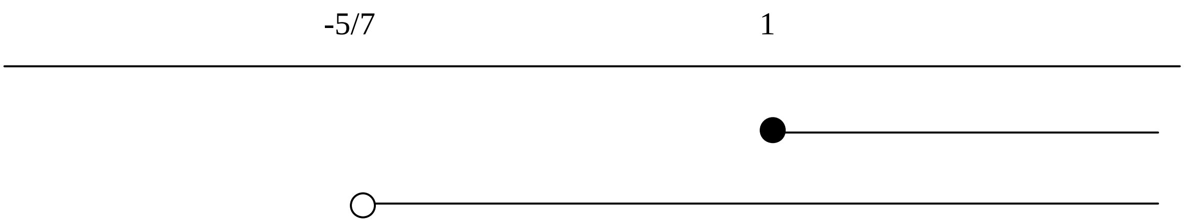
⇒ Risolviamo il primo sistema.
La prima disequazione è di secondo grado, il coefficiente di x^2 è positivo e l'equazione associata si annulla per x = - 3 e x = - 2; è quindi soddisfatta per x ≤ - 3 e x ≥ - 2.
La seconda disequazione è soddisfatta per x < 1.
Riportando i risultati in grafico si ha



La soluzione è x ≤ - 3 e - 2 ≤ x < 1.

⇒ Risolviamo il secondo sistema.
La prima disequazione è soddisfatta per x ≥ 1.
Sviluppando i calcoli la seconda diventa: $7x+5>0$ la cui soluzione è $x>-5/7$.

Riportando i risultati in grafico si ha



La soluzione del sistema è x ≥ 1.
Unendo le due soluzioni dei due sistemi, la soluzione della disequazione è x ≤ -3 e x ≥ -2.