SOLUZIONI FILA 1

1) $\left(x+2\right)^4\left(x^3-8\right)\left(x^6+x^4-x^2-1\right)\geq 0$	$x=-2 \vee -1\leq x\leq 1 \vee x\geq 2$

Pag. 45 n. 226 modificata

Il termine di sinistra della disequazione va scomposto in fattori, in particolare il secondo e il terzo fattore. Si ha:

$$\left(x+2\right)^4\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)\left[x^4\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)\right]\geq 0$$

$$\left(x+2\right)^4\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4-1\right)\geq 0$$

$$\left(x+2\right)^4\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+1\right)^2\left(x^2-1\right)\geq 0$$

Studiamo il segno di ogni fattore

$\Rightarrow\left(x+2\right)^4$ è sempre maggiore di zero tranne per x = - 2 che risulta uguale a zero

$\Rightarrow\left(x-2\right)$

$\left(x-2\right)>0$ per x > 2

$\left(x-2\right)=0$ per x = 2

$\left(x-2\right)<0$ per x < 2

$\Rightarrow\left(x^2+2x+4\right)$ è sempre maggiore di zero in quanto il trinomio ha il coefficiente della x^2 maggiore di 0 e il $\Delta < 0$

$\Rightarrow\left(x^2+1\right)^2$ Sempre maggiore di zero essendo il quadrato della somma di due quadrati

$\Rightarrow\left(x^2-1\right)$

$\left(x^2-1\right)>0$ per x < -1 e x > 1

$\left(x^2-1\right)=0$ per x = ± 1

$\left(x^2-1\right)<0$ per -1 < x < 1

Riassumendo

		-2		-1		1		2	
$\left(x+2\right)^4$	+	0	+	|	+	|	+	|	+
$\left(x-2\right)$	-	|	-	|	-	|	-	0	+
$\left(x^2-2x+x^2\right)$	+	|	+	|	+	|	+	|	+
$\left(x^2+1\right)^2$	+	|	+	|	+	|	+	|	+
$\left(x^2-1\right)$	+	|	+	0	-	0	+	|	+
	-	0	-	0	+	0	-	0	+

La soluzione è quindi x = 2, -1 ≤ x ≤ 1, x ≥ 2.

2) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{5x+1}{x-2}+\frac{3x^2-2x-14}{x^2-5x+6}\le 0$	$x\le 1\vee 2<x<3\vee x\ge 7$

Pag. 48 n. 269 modificata.

E' una disequazione razionale fratta e per prima cosa bisogna ridurla alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}\le 0$. Si osservi immediatamente che $(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$, quindi

$\frac{(x-2)^2-(5x+1)(x-3)+3x^2-2x-14}{(x-2)(x-3)}\le 0$ da cui segue $\frac{-x^2+8x-7}{(x-2)(x-3)}\le 0$ e quindi

$$\frac{x^2-8x+7}{(x-2)(x-3)}\ge 0$$

⇒ Il numeratore, x^2-8x+7, risulta maggiore di zero per x < 1 e x > 7, uguale a zero per x = 1 e x = 7, minore di zero per 1 < x < 7.

⇒ Il denominatore $(x-2)(x-3)$ risulta maggiore di zero per x < 2 e x > 3, uguale a zero per x = 2 e x = 3, minore di zero per 2 < x < 3.

Riassumendo

		1		2		3		7	
N	+	0	-	|	-	|	-	0	+
D	+	|	+	0	-	0	+	|	+
N/D	+	0	-	∄	+	∄	-	0	+

La soluzione è quindi x ≤ 1, 2 < x < 3, x ≥ 7.

3) $\begin{cases}\frac{x-3}{x+1}\ge 2\\ x^4+3x^2-4\ge 0\end{cases}$	$-5\le x<-1$

Pag. 52 n. 320 modificata

E' un sistema di disequazioni. È quindi necessario risolvere le due disequazioni separatamente e poi fare l'intersezione delle soluzioni.

⇒ La prima disequazione è una disequazione razionale fratta, quindi, dopo averla ricondotta alla forma $\frac{A(x)}{B(x)}\ge 0$ basta studiare il segno del numeratore e quello del denominatore e fare il prodotto dei segni.

Si ha:

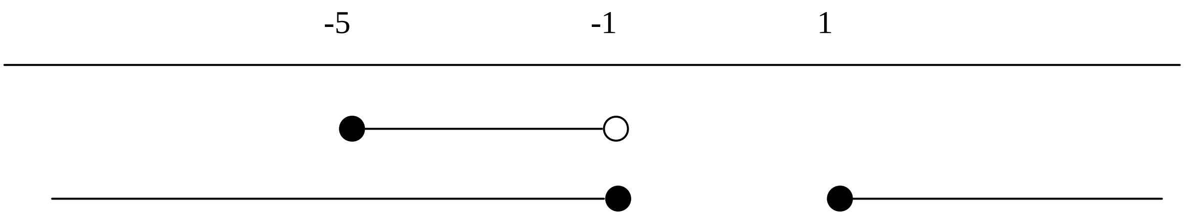
$$\frac{x-3}{x+1}\ge 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-3-2(x+1)}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-3-2x-2}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-x-5}{x+1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x+5}{x+1}\le 0$$

		-5		-1	
$x+5$	-	0	+	|	+
$x+1$	-	|	-	0	+
	+	0	-	$\nexists$	+

La soluzione è $-5 \le x < -1$

$\Rightarrow$ La seconda disequazione è una biquadratica.
Poniamo quindi $t = x^2$, si ha: $t^2 + 3t - 4 \ge 0$ che è soddisfatta per $t \le -4$ e $t \ge 1$. Ne segue che deve essere $x^2 \le -4$ e $x^2 \ge 1$.
La prima non è mai soddisfatta, mentre la seconda è soddisfatta per $x \le -1$ e $x \ge 1$

Riportando in un diagramma le soluzioni delle due disequazioni otteniamo



La soluzione è $-5 \le x < -1$.

4) $\dfrac{\lvert 2x-3\rvert -1}{\lvert x\rvert -2} \ge 0$	$x < -2 \vee x \ge 1, x \ne 2$

Pag. 61 n. 491

E' una disequazione fratta con valori assoluti. Per la soluzione si possono seguire due modi: il primo che riporto è il più immediato.

PRIMO MODO: si studiano il segno del numerato e quello del denominatore

Numeratore $\lvert 2x-3\rvert -1$

Vediamo quando è maggiore o uguale a zero: $\lvert 2x-3\rvert -1 \ge 0$

$\lvert 2x-3\rvert \ge 1$ da cui segue: $2x-3 \le -1$ e $2x-3 \ge 1$, ossia $x \le 1$, $x \ge 2$.

Ovviamente, $\lvert 2x-3\rvert -1 < 0$ per $1 < x < 2$

Denominatore: $\lvert x\rvert -2$

Vediamo quando è positivo: $\lvert x\rvert -2 > 0$

Si ha: $\lvert x\rvert > 2$ ossia $x < -2$ e $x > 2$

Ovviamente

$\lvert x\rvert -2 < 0$ per $-2 < x < 2$

$\lvert x\rvert -2 = 0$ per $x = \pm 2$

Mettendo insieme i segni del numeratore e del denominatore si ha:

		-2		1		2	
$\lvert 2x-3\rvert-1$	+	|	+	0	-	0	+
$\lvert x\rvert-2$	+	0	-	|	-	0	+
	+	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	+

Da cui la soluzione: $x<-2$, $1\le x<2$, $x>2$.

SECONDO MODO: si studia il segno delle due quantità dentro il valore assoluto

$2x-3>0$ per $x>\dfrac{3}{2}$

$2x-3=0$ per $x=\dfrac{3}{2}$

$2x-3<0$ per $x<\dfrac{3}{2}$

Tralasciamo l'ovvio studio del segno del secondo modulo e riportiamo in grafico

		0		3/2	
2x – 3	-	|	-	0	+
x	-	0	+	|	+

Ciò ci permette di identificare tre zone e i segni di ognuna delle espressione dentro il valore assoluto. Abbiamo quindi i seguenti tre sistemi:

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{-(2x-3)-1}{-x-2}\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le x\le 3/2 \\ \dfrac{-(2x-3)-1}{x-2}\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3/2 \\ \dfrac{(2x-3)-1}{x-2}\ge 0 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei tre sistemi.

$\Rightarrow$ Risolviamo il primo; semplificando si ottiene

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{2(x-1)}{x+2}\ge 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione è una razionale fratta. Ricaviamo la soluzione dal grafico

		-2		1	
x – 1	-	|	-	0	+
x + 2	-	0	+	|	+
	+	$\nexists$	-	0	+

La soluzione è $x < -2$ e $x \ge 1$. Dovendo però essere $x < 0$, la soluzione del sistema è $x < -2$.

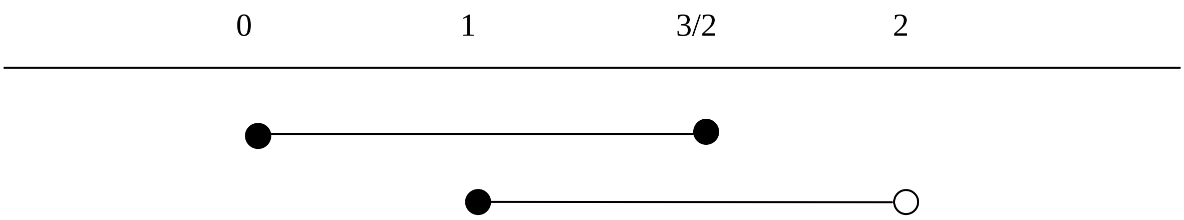
$\Rightarrow$ Risolviamo il secondo sistema; semplificando si ottiene

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3/2 \\ \dfrac{2(-x+1)}{x-2} \ge 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso basta studiare la seconda disequazione, riportando i risultati in grafico si ha:

		1		2	
- x + 1	+	0	-	|	-
x - 2	-	|	-	0	+
	-	0	+	∄	-

La soluzione è 1 ≤ x < 2.
Per vedere la soluzione del secondo sistema riportiamo in grafico



La soluzione del secondo sistema è 1 ≤ x ≤ 3/2.

⇒ Per quanto riguarda il terzo sistema, risolvendo si arriva a:

$$\begin{cases} x > 3/2 \\ \dfrac{2(x-2)}{x-2} \ge 0 \end{cases}$$

Si osserva che la seconda disequazione, per x = 2, non ha senso (viene 0/0 che è indeterminato), ma per x ≠ 2 si può semplificare e si riduce a 2 ≥ 0 che è sempre verificata.
La soluzione del sistema è quindi x > 3/2, ma x ≠ 2.

Unendo le tre soluzion1 si ha: x < -2, x ≥ 1, x ≠ 2

5) $\sqrt{7+3(x+2)-2(2x-3)} < -1-x$	$x < -6$

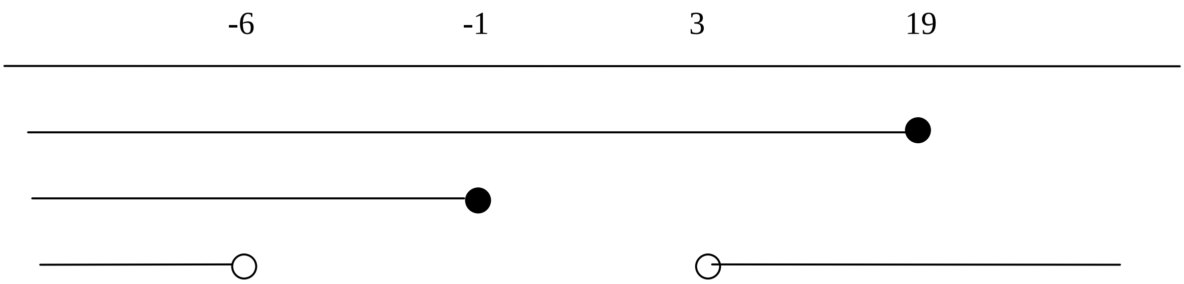
Pag. 66 n. 582

E’ una disequazione irrazionale con radice di esponente pari. Semplifichiamo sotto la radice, si ottiene :

$\sqrt{19-x} < -1-x$ che si risolve risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 19-x \ge 0 \\ -1-x \ge 0 \\ 19-x < (-1-x)^2 \end{cases} \quad \text{da cui segue} \quad \begin{cases} x \le 19 \\ x \le -1 \\ x^2+3x-18 > 0 \end{cases}$$

La soluzione della terza equazione è : x < -6 e x > 3, riportando in grafico il sistema è soddisfatto per x < -6.



6) $\sqrt{x(x-6)+x+6}+3x>4x-5$ $\qquad\qquad$ $x \le 2 \vee x \ge 3$

Pag. 67 n. 590 modificata

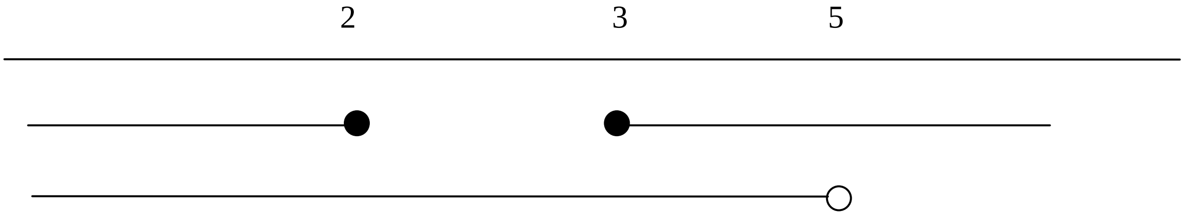
E' una disequazione irrazionale con radice di esponente pari. Semplifichiamo, si ottiene :
$\sqrt{x^2-5x+6} > x-5$ che si risolve risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} x^2-5x+6 \ge 0 \\ x-5<0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x-5 \ge 0 \\ x^2-5x+6>(x-5)^2 \end{cases}$$

e facendo poi l'unione delle soluzioni.

$\Rightarrow$ Risolviamo il primo sistema.
La prima disequazione è di secondo grado, il coefficiente di x^2 è positivo e l'equazione associata si annulla per x = 2 e x = 3; è quindi soddisfatta per x ≤ 2 e x ≥ 3.
La seconda disequazione è soddisfatta per x < 5.

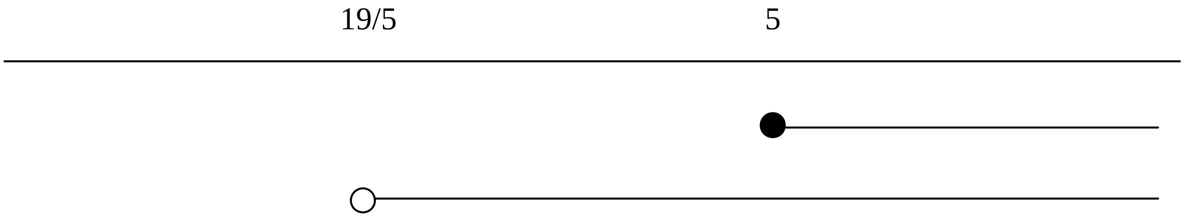
Riportando i risultati in grafico si ha



La soluzione è x ≤ 2 e 3 ≤ x < 5.

$\Rightarrow$ Risolviamo il secondo sistema.
La prima disequazione è soddisfatta per x ≥ 5.
Sviluppando i calcoli la seconda diventa: $5x-19>0$ la cui soluzione è $x>19/5$.

Riportando i risultati in grafico si ha



La soluzione del sistema è x ≥ 5.
Unendo le due soluzioni dei due sistemi, la soluzione della disequazione è x ≤ 2 e x ≥ 3.